MOLDOVA STATE UNIVERSITY
Center for Education and Research
in Mathematics and Computer Science
MRDA/CRDF

Theoretical and Applied Mathematics
Monograph Series

В.И.АРНАУТОВ

Н.Н.МАЛЮТИНА

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Chişinău ∗ 2008

CZU 519.7
L 82

Это издание написано на базе цикла лекций по общей топологии, который читался в Приднестровском Государственном Университете для студентов физико-математического факультета в рамках обязательного курса по общей топологии.

Она будет полезна студентам математических специальностей физико-математических факультетов университетов, учащимся магистратуры и аспирантам, которым для проведения научных исследований необходимы знания по общей топологии.

Authors: *В.И.Арнаутов, профессор, академик АН М*
Н.Н.Малютина, ст. преподаватель

Reviewer: *М.М.Чебан, профессор, академик АН М*

Recommended for publication by Scientific Council
of Center for Education and Research
in Mathematics and Computer Science

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

В.И.Арнаутов, Н.Н.Малютина

Общая топология. Moldova State University, Center for Education and Research in Mathematics and Computer Science (MRDA/CRDF) – Ch.: CEP USM, 2008. – 106 p.

Bibliogr. p. 106 (69 tit.)
ISBN 978-9975-70-691-9
150 ex.

519.7

ISBN 978-9975-70-691-9

ВВЕДЕНИЕ.

Общая топология – это раздел математики, в котором с самых общих позиций изучается такое важное математическое понятие как непрерывность.

Общая топология не только является важным разделом современной математики, но находит широкое применение в других областях математики (алгебре, геометрии, математическом анализе и др.).

Основой этого издания является цикл лекций по курсу топологии, который читался на протяжении нескольких лет студентам физико-математического факультета Приднестровского университета.

В этом издании имеются многочисленные упражнения, которые призваны закрепить изученный материал.

Мы настоятельно рекомендуем всем изучающим этот курс попытаться самим решить эти упражнения, и лишь после этого посмотреть, приведенное в конце этого издания решение этих упражнений. Это позволяет изучающим этот курс, убедиться в правильности полученного ими самими решения этих упражнений.

Это издание будет полезным студентам, изучающим курс общей топологии, учащимся магистратуры и аспирантам, которым в своих исследованиях приходится применять результаты и методы общей топологии.

Все результаты, включенные в это издание, имеются и в других изданиях, в частности в изданиях, которые указаны в разделе “Рекомендуемая литература”, и авторы этого издания не претендуют на авторство изложенных здесь результатов.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА.

1.1. Определение (топологического пространства). Пусть дано непустое множество X. Говорим, что на множестве X задана *топологическая структура* (другими словами - *топология)* τ, если задана непустая совокупность τ подмножеств множества X (элементами совокупности τ являются некоторые подмножества множества X), удовлетворяющая следующим трём аксиомам:

1. X, $\emptyset \in \tau$;
2. Если A, $B \in \tau$, то $A \cap B \in \tau$;
3. Если $S \subseteq \tau$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$.

Пара (X, τ), где $X \neq \emptyset$ и τ- топологическая структура на множестве X, называется *топологическим пространством*, а подмножества множества X, которые принадлежат τ, называются *открытыми множествами* в топологическом пространстве (X, τ).

На языке открытых множеств аксиомы определения 1.1 будут выглядеть так:

1. Всё пространство X и пустое множество $\emptyset$ являются открытыми множествами;

2. Пересечение двух открытых множеств является открытым множеством;

3. Объединение любой совокупности открытых множеств является открытым множеством.

1.2. Теорема. *Пусть* (X, τ)- *топологическое пространство и* $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$. *Тогда* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$. *(т.е. пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством).*

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции.

Если $n = 1$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{1} A_i = A_1 \in \tau$, т.е. база индукции доказана.

Предположим, что из того, что A_1, $A_2, ..., A_{n-1} \in \tau$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \in \tau$ и пусть A_1, $A_2, ..., A_n \in \tau$.

Тогда, по допущению, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \in \tau$. Согласно второй аксиоме определения топологического пространства имеем

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \bigcap A_n = B \bigcap A_n \in \tau$$

Теорема доказана.

1.3. Упражнения. Доказать, что:

1.3.1. Если $X \neq \emptyset$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$, т.е. τ содержит только два подмножества множества X, то τ является топологией на множестве X.

Это топологическое пространство (X,τ) называется *антидискретным пространством*, а топология $\tau = \{\emptyset, X\}$ называется *антидискретной топологией.*

1.3.2. Пусть $X \neq \emptyset$ и $\tau = \{A \,|\, A \subseteq X\}$, т.е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Тогда τ является топологией на множестве X.

Это топологическое пространство (X,τ) называется *дискретным пространством*, а топология $\tau = \{A \,|\, A \subseteq X\}$ называется *дискретной топологией.*

1.3.3. Пусть $X = \{a, b\}$. Рассмотрим следующие четыре совокупности подмножеств множества X:
$\tau_1 = \{\emptyset,\ X\}$,
$\tau_2 = \{\emptyset,\ \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$,
$\tau_3 = \{\emptyset,\ \{a,b\}, \{a\}\}$;
$\tau_4 = \{\emptyset,\ \{a,b\}, \{b\}\}$.
Тогда каждая из этих совокупностей является топологией на множестве X.

1.3.4. Пусть $X = \{a, b\}$. Рассмотрим следующие совокупности $\sigma_1 = \{X, \{a\}\}$и $\sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}\}$ подмножеств множества X.Показать, что совокупности σ_1 и σ_2 не являются топологиями.

1.3.5. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и рассмотрим на X следующие совокупности:

$$\tau_1 = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{a,c\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}.\{b,c\}\} \quad ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset,\ X,\}$$

$$\tau_3 = \{\emptyset,\ X, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\};$$

$$\tau_4 = \{\emptyset,\ X, \{a,c\}, \{a\}, \{c\}\} \quad ;$$

$$\tau_5 = \{\emptyset,\ X, \{c, b\}, \{c\}, \{b\}\}.$$

Тогда каждая из этих совокупностей является топологией на множестве X.

1.3.6. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Рассмотрим следующие 2 совокупности: $\sigma_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ и $\sigma_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ подмножеств множества X.

Тогда каждая из этих совокупностей не является топологией.

1.3.7. Пусть X - произвольное бесконечное множество и

$$\tau = \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ - \textit{конечное}}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Тогда эта совокупность является топологией на множестве X.

1.3.8. Если $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел, и $\tau_{инт} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ - объединение интервалов $\}$, то $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - топологическое пространство, т.е. совокупность $\tau_{инт}$ является топологией на множестве $\mathbb{R}$.

Эта топология называется *интервальной* топологией, а топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ называется *пространством действительных чисел с интервальной топологией.*

1.4. Определение. Как обычно, говорим, что на множестве $X \neq \emptyset$ задана *метрика* ρ, если для любой пары элементов $a, b \in X$ определено такое неотрицательное действительное число $\rho(a, b)$ (называемое *расстоянием* от a до b), что выполняются следующие условия:

1) $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ для любых $a.b \in X$;
3) $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$ для любых $a, b, c \in X$.

Пара (X, ρ)- называется *метрическим пространством.*

Например, для множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, $\rho(a, b) = |b - a|$ является метрикой.

1.5. Теорема. *Если (X, ρ)- метрическое пространство, то совокупность*

$$\tau_\rho = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists \varepsilon_x > 0,\ \{y \in X \,|\rho(x, y) < \varepsilon_x\} \subseteq A\}$$

является топологией на множестве X.

Эта топология называется *топологией, которая задается метрикой ρ.*

Доказательство. Проверим выполнимость аксиом определения топологического пространства:

Пусть $x \in X$. Возьмем $\varepsilon_x = 1$. Так как $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < 1\} \subseteq X$, то $X \in \tau_\rho$;

Так как $\emptyset$ не содержит ни каких элементов, то для любого $x \in \emptyset$ имеем, что $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < 1\} = \emptyset \subseteq \emptyset$, и значит, $\emptyset \in \tau_\rho$. Следовательно, первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $A, B \in \tau_\rho$ и $C = A \cap B$. Если $x \in C$, то $x \in A$ и $x \in B$, и значит существуют такие $\varepsilon_{x,A} > 0$ и $\varepsilon_{x,B} > 0$, что $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < \varepsilon_{x,A}\} \subseteq A$ и $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < \varepsilon_{x,B}\} \subseteq B$. Возьмём $\varepsilon_{x,C} = \min\{\varepsilon_{x,A}, \varepsilon_{x,B}\}$. Тогда $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < \varepsilon_{x,C}\} \subseteq A \cap B = C$, т.е. $C = A \cap B \in \tau_\rho$, и значит, вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $S \subseteq \tau_\rho$ и $B = \bigcup\limits_{A \in S} A$, проверим, что $B \in \tau_\rho$.

Если $x \in B$, то существует такое множество $A_0 \in S$, что $x \in A_0$. Так как $A_0 \in \tau_\rho$, то существует такое число $\varepsilon_x > 0$, что $\{y \in X \,|\, \rho(x, y) < \varepsilon_x\} \subseteq A_0 \subseteq B$, и значит, $B \in \tau_\rho$. Следовательно, τ_ρ является топологией на множестве X.

1.6. Проблема. *Сколько различных топологий можно задать на конечном множестве?*

Хотя формулировка, указанной выше проблемы, является на первый взгляд простой, однако ее решение является очень сложным и до настоящего времени она не решена.

Поэтому представляет интерес получить хотя бы некоторые оценки числа возможных топологий на множестве состоящим из n элементов. Одну из таких оценок, хотя и достаточно грубую, дает следующая теорема.

1.7. Теорема. *Если X - конечное непустое множество и n- число его элементов, то число всех топологий на множестве X не превосходит числа 2^{2^n-2}.*

Доказательство. Пусть Δ - множество всех подмножеств множества X. Тогда Δ имеет 2^n элементов. Если Ω - множество всех подмножеств множества $\Delta \backslash \{X, \emptyset\}$, то число элементов множества Ω равно 2^{2^n-2}.

Так как любая топология τ состоит из подмножеств множества X, то $\tau \subseteq \Delta$, и значит $\tau \backslash \{X, \emptyset\} \in \Omega$.

Поскольку, согласно первой аксиоме определения 1.1, $\{X, \emptyset\} \subseteq \tau$ для любой топологии τ, определенной на множестве X, то для любых топологий τ_1 и τ_2, заданных на множестве X, $\tau_1 \neq \tau_2$ тогда и только тогда когда $\tau_1\backslash\{X,\emptyset\} \neq \quad \tau_2\backslash\{X,\emptyset\}$, и значит, число различных топологий на множестве X не превосходит числа элементов множества Ω, т.е. не превосходит числа 2^{2^n-2}.

1.8. Следствие. *Если* $X = \{a,b\}$ (т.е. является двухэлементным множеством), *то число всех топологий на нем не превосходит числа* $2^{2^2-2} = 2^2 = 4$. *Поскольку в 1.3.3 указаны 4 различных топологий на множестве* $X = \{a,b\}$, *то этими четырьмя топологиями исчерпываются все топологии на множестве* $X = \{a,b\}$.

1.9. Пример. Пусть $X = \{a,b,c\}$**.** Рассмотрим следующую таблицу, состоящая из 64=2^{2^3-2} совокупностей σ_i подмножеств множества X, и выясним какие из них являются топологиями (в этой таблице указаны только те совокупности, которые содержат $\emptyset$ и X, ибо остальные совокупности не являются топологиями, поскольку для них не выполняется первая аксиома определения 1.1).

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
1	$\{\emptyset,X\}$	Антидискретная топология
2	$\{\emptyset,X,\{a\}\}$	Является топологией
3	$\{\emptyset,X,\{b\}\}$	Является топологией
4	$\{\emptyset,X,\{c\}\}$	Является топологией
5	$\{\emptyset,X,\{a\},\{b\}\}$	Не является топологией
6	$\{\emptyset,X,\{a\},\{c\}\}$	Не является топологией
7	$\{\emptyset,X,\{b\},\{c\}\}$	Не является топологией
8	$\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\}\}$	Не является топологией
9	$\{\emptyset,X\{a,b\}\}$	является топологией
10	$\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$	Является топологией
11	$\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\}\}$	Является топологией
12	$\{\emptyset,X,\{c\}, \{a,b\}\}$	Является топологией
13	$\{\emptyset,X,\{a\},\{b\}, \{a,b\}\}$	Является топологией
14	$\{\emptyset,X,\{a\},\{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
15	$\{\emptyset,X,\{b\},\{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
16	$\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
17	$\{\emptyset,X,\{a,c\}\}$	Является топологией
18	$\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$	Является топологией
19	$\{\emptyset,X,\{b\},\{a,c\}\}$	Является топологией
20	$\{\emptyset,X,\{c\}, \{a,c\}\}$	Является топологией
21	$\{\emptyset,X,\{a\},\{b\}, \{a,c\}\}$	Не является топологией

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
23	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
24	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
25	$\{\emptyset, X, \{b, c\}\}$	Является топологией
26	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
27	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
29	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
30	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
31	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
32	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
33	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топология
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
35	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
36	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топология
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
39	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
40	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
41	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
42	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
43	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
45	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
48	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
49	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
50	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
51	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
52	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
54	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
56	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
57	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
58	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
59	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
60	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
61	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
62	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
63	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$	Не является топологией
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Дискретная топология

1.10. Замечание. Из предыдущей таблицы видно, что на трехэлементном множестве можно задать 29 различных топологий.

1.11. Замечание. Если X содержит больше трех элементов, то для нахождения всех возможных на нем топологий нужно рассмотреть очень большое число совокупностей подмножеств множества X. Так:

– Если X является четырехэлементным множеством, то для нахождения всех возможных топологий нужно рассмотреть $2^{2^4-2} = 2^{14} = 16384$ совокупностей подмножеств множества X;

– Если же X является пятиэлементным множеством, то для нахождения всех возможных топологий нужно рассмотреть $2^{2^5-2} = 2^{30} > 10^8$ совокупностей подмножеств множества X.

Поэтому нужно искать другие методы (кроме полного перебора) построения всех топологий на конечных множествах.

1.12. Замечание. Для бесконечного множества X верна следующая теорема (для ее доказательства нужны знания из теории трансфинитных и кардинальных чисел, поэтому мы не приводим ее доказательства).

1.13. Теорема. Если X - бесконечное множество и m - его мощность, то мощность множества всех топологий, которые возможны на множестве X, равна 2^{2^m}, т.е. равна мощности множества всех совокупностей подмножеств множества X. (Это не означает, что всякая совокупность подмножеств множества X является топологией на множестве X.)

1.14. Определение. Совокупность Ω подмножеств множества X называется *базой топологического пространства* (X, τ), если выполняются следующие условия:

– Любое подмножество из Ω является открытым в (X, τ), т.е. $\Omega \subseteq \tau$;

– Всякое открытое множество топологического пространства (X, τ) является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω.

1.15. Упражнения. Проверить, что следующие совокупности являются базами соответствующих пространств.

1.15.1. В любом топологическом пространстве (X, τ) совокупность τ является базой пространства;

1.15.2. В дискретном пространстве (X, τ) совокупность $\Omega = \{\{x\} | x \in X\}$ является базой пространства;

1.15.3. В множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{инт}$ совокупность Ω всех интервалов с рациональными концами является базой топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$;

1.15. 4. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство и τ_ρ - топология, задаваемая метрикой ρ (см. теорема 1.5). Для любого элемента $a \in X$ и произвольного натурального числа n рассмотрим множество $U_{a,n} = \{y \in X | \rho(a, y) < 2^{-n}\}$. Тогда совокупность $\Omega = \{U_{a,k} | a \in X, k \in \mathbb{N}\}$ является базой топологического пространства (X, τ_ρ).

1.16. Теорема. *Если Ω - база топологического пространства (X, τ), то верны следующие утверждения:*

***1.16.1.**.$\Omega \subseteq \tau$ и $\bigcup\limits_{U \in \Omega} U = X$;*

***1.16.2.** Для любых множеств $U, V \in \Omega$ и произвольного элемента $a \in U \bigcap V$ существует такое $W \in \Omega$, что $a \in W \subseteq U \cap V$.*

Доказательство. Утверждение 1.6.1 следует из определения 1.14 и того, что $X \in \tau$.

Пусть теперь $U, V \in \Omega$ и $a \in U \bigcap V$. Тогда $U, V \in \Omega \subseteq \tau$ и значит $U \cap V \in \tau$. Согласно второму условию определения 1.14, $U \bigcap V$ является объединением некоторой совокупности множеств принадлежащих Ω, и значит $a \in W \subseteq U \cap V$для некоторого $W \in \Omega$.

1.17. Теорема. *Пусть Ω - такая совокупность подмножеств множества X, что верны следующие утверждения:*

1. $\bigcup\limits_{U \in \Omega} U = X$;

2. Для любых $U, V \in \Omega$ и произвольного элемента $a \in U \bigcap V$ существует такое $W \in \Omega, a \in W \subseteq U \cap V$.

Тогда на множествеX существует и притом единственная топология τ такая, что Ω является базой топологического пространства (X, τ).

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа.

Построение топологии. Рассмотрим совокупность τ всех таких подмножеств множества X, каждое из которых является объединением некоторой совокупности подмножеств , принадлежащих Ω. Так как $\emptyset = \bigcup\limits_{U \in \emptyset} U$ и, согласно условию 1 формулировки теоремы, $\bigcup\limits_{U \in \Omega} U = X$, то τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $U, U' \in \tau$. Так как каждое из множеств U и U' является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω, то, для любого элемента $a \in U \cap U'$ найдутся такие подмножества $V_a, V'_a \in \Omega$, что $a \in V_a \subseteq U$ и $a \in V'_a \subseteq U'$. Согласно условию 2 формулировки теоремы, для элемента $a \in U \cap U'$ найдется такое подмножество $W_a \in \Omega$, что $a \in W_a \in V_a \cap V'_a \subseteq U \cap U'$. Тогда $U \cap U' = \bigcup\limits_{a \in U \cap U'} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a \in U \cap U'} W_a \subseteq U \cap U'$, и значит, $U \cap U' = \bigcup\limits_{a \in U \cap U'} W_a$ т.е. $U \cap U' \in \tau$. Следовательно, τ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Если $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$, то каждое из подмножеств U_γ является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω. Тогда и множество $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ можно представить как объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω. Следовательно, τ удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1, т.е. τ является топологией на множестве X.

Так как любое множество из τ можно представить как объединение некоторой совокупности подмножеств из Ω, то Ω является базой пространства (X, τ).

Единственность топологии τ. Пусть τ' - любая такая топология на множестве X, что Ω является базой топологического пространства (X, τ').

Если $U \in \tau$, то U является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω (см. выше определение совокупности τ). Так как Ω является базой пространства (X, τ'), то $\Omega \subseteq \tau'$, и поскольку τ' удовлетворяет третей аксиоме определения 1.1, то $U \in \tau'$, и значит, $\tau \subseteq \tau'$.

Если же $W \in \tau'$, то, поскольку Ω является базой топологического пространства (X, τ'), W является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω, и значит (см. определение совокупности τ) $\;W \in \tau$. Из произвольности W следует, что $\tau' \subseteq \tau$. Следовательно $\tau = \tau'$.

Этим теорема полностью доказана.

2. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК

2.1. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$. Подмножество U называется *окрестностью точки* a в топологическом пространстве (X, τ), если существует такое множество $V \in \tau$, что $a \in V \subseteq U$.

Замечание. В некоторых учебниках по топологии под окрестностью понимают всякое открытое множество содержащее точку a. Однако это отличие не является существенным.

2.2. Упражнения. Доказать, что:

2.2.1. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$. Если $A \in \tau$, то A является окрестностью любой точки $a \in A$, т.е. в любом топологическом пространстве всякое открытое множество является окрестностью любой своей точки.

2.2.2. Если (X, τ) - антидискретное пространство, то множество V является окрестностью точки $a \in X$ тогда и только тогда когда $V = X$.

2.2.3. Пусть (X, τ) - дискретное пространство и $A \subseteq X$. Если $a \in A$, то A - окрестность точки a.

2.2.4. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{инт}$ и $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим интервал $A = (r-1, r+1)$ и $B = \{x \mid x-$ *рациональное число*, $r-1 < x < r+1\}$.

Тогда A является окрестностью точки r, а B не является окрестностью точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

2.3. Теорема (Свойства окрестностей точек). *Пусть* (X, τ) - *топологическое пространство, тогда верны следующие утверждения:*

2.3.1. *Если* U- *окрестность точки* a в (X, τ), то $a \in U$(*любая окрестность точки содержит эту точку).*

2.3.2. *Если* U - *окрестность точки* a и $U \subseteq V \subseteq X$, *то* V - *окрестность точки* a, *т.е. множество, содержащее некоторую окрестность точки, само является окрестностью этой точки.*

2.3.3. *Если* U и V - *окрестности точки* a, то и $U \cap V$ - *окрестность точки* a, *и значит, пересечение любого конечного числа окрестностей точки* a *является окрестностью этой точки.*

2.3.4. *Подмножество* $U \subseteq X$ *тогда и только тогда является открытым, когда оно является окрестностью любой своей точки.*

Доказательство.

Если U- окрестность точки a, то существует такое $W \in \tau$, что $a \in W \subseteq U$, и значит $a \in U$. Этим утверждение 2.3. 1 доказано.

Пусть теперь $U \subseteq V$ и U - окрестность точки a. Тогда существует такое $W \in \tau$, что $a \in W \subseteq U \subseteq V$, и значит $V-$ окрестность точки a. Этим утверждение 2.3.2 доказано.

Если U и V - окрестности точки a, то существуют такие $W_1, W_2 \in \tau$, что $a \in W_1 \subseteq U$ и $a \in W_2 \subseteq V$. Тогда $W = W_1 \cap W_2 \in \tau$ и $a \in W \subseteq U \cap V$, т.е. $U \cap V$- окрестность точки a. Этим утверждение 2.3.3 доказано.

Если $U \in \tau$, то, согласно упражнению 2.2.1, U является окрестностью любой своей точки.

Пусть теперь подмножество U является окрестностью любой своей точки. Тогда для любого $a \in U$ существует такое $V_a \in \tau$, что $a \in V_a \subseteq U$. Так как

$U = \bigcup\limits_{a \in U} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a \in U} V_a \subseteq U$, то $U = \bigcup\limits_{a \in U} V_a$ и согласно аксиоме 3 определение 1.1, получаем, что $U \in \tau$. Этим утверждение 2.3.4 доказано.

2.4. Определение *Пусть* (X, τ) - топологическое пространство и a - некоторый элемент из множества X. Совокупность Ω подмножеств множества X называется *базисом окрестностей точки* a в топологическом пространстве (X, τ), если выполняются следующие условия:

1) Любое $U \in \Omega$ является окрестностью точки a;

2) Для любой окрестности V точки a найдется такое подмножество $U \in \Omega$, что $U \subseteq V$.

2.5. Упражнения. Доказать, что:

2.5. 1. Если (X, τ) - антидискретное пространство и $a \in X$, то совокупность $\Omega_a = \{X\}$ является базисом окрестностей точки a.

2.5. 2. Если (X, τ) - дискретное пространство и $a \in X$, то $\Omega_a = \{\{a\}\}$ является базисом окрестностей точки a.

2.5. 3. Если $X = \{a, b\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то совокупность $\Omega_a = \{\{a\}\}$ является базисом окрестностей точки a и совокупность $\Omega' = \{X\}$ является базисом окрестностей точки b, но Ω' не является базисом окрестностей точки a.

2.5. 4. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией, $a \in \mathbb{R}$ и $\Omega = \left\{ \left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$, тогда совокупность Ω является базисом окрестностей точки a.

2.5. 5. Пусть $\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел и

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N} \backslash A \text{ -\textit{конечное множество}}\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

Тогда, согласно упражнению 1.3.7, τ является топологией на множестве $\mathbb{N}$.

Доказать, что совокупность

$$\Omega = \{\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\} \,|n \in \mathbb{N}\}$$

является базисом окрестностей точки 1 в постранстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

2.6. Теорема. *Если* (X, τ) *- топологическое пространство, то любая точка $a \in X$ обладает базисом окрестностей, которые являются открытыми множествами.*

Доказательство. Для любой точки $a \in X$ рассмотрим совокупность $\Theta_a = \{U | U \in \tau, \text{ и } a \in U\}$. Тогда для любого $a \in X$ произвольное подмножество $U \in \Theta_a$ является окрестностью точки a (см. упражнение 2.2.1).

Кроме того, если $a \in X$ и V - окрестность точки a, то существует такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq V$. Тогда $U \in \Theta_a$, и значит, Θ_a является базисом окрестностей точки a.

Этим теорема полностью доказана.

2.7. Теорема. *Пусть* (X, τ) *- топологическое пространство и для каждого* $a \in X$ *задан некоторый базис* Ω_a *окрестностей точки* a *в пространстве* (X, τ). *Тогда верны следующие утверждения*:

2.7.1. *Если* $a \in X$ *и* $U, V \in \Omega_a$ *, то существует такое* $W \in \Omega_a$, *что* $W \subseteq U \cap V$;

2.7.2. *Если* $a \in X$ *и* $U \in \Omega_a$ *, то существует* $W \in \Omega_a$, *такое что* U *является окрестностью любой точки* $x \in W$.

Доказательство. Если $a \in X$ и $U, V \in \Omega_a$, то $U \cap V$ является окрестностью точки a (см. утверждение 2.3.3). Так как Ω_a является базисом окрестностей точки a, то существует такое $W \in \Omega_a$, что $W \subseteq U \cap V$. Этим утверждение 2.7.1 доказано.

Пусть теперь $U \in \Omega_a$. Тогда U является окрестностью точки a, и значит, существует такое $V \in \tau$, что $a \in V \subseteq U$. Так как V является окрестностью точки a и Ω_a является базисом окрестностей точки a, то существует такое $W \in \Omega_a$, что $W \subseteq V$.

Если теперь $x \in W$, то $x \in V \subseteq U$ и поскольку $V \in \tau$, то U будет окрестностью точки x.

Этим теорема полностью доказана.

2.8. Теорема. *Пусть X-произвольное непустое множество и для каждого $a \in X$ задана такая непустая совокупность Θ_a подмножеств множества X, что выполнены следующие условия:*

1. $a \in U$ для любого $U \in \Theta_a$ и произвольного $a \in X$;

2. Если $a \in X$ и $U, V \in \Theta_a$, то существует такое $W \in \Theta_a$, что $W \subseteq U \cap V$;

3. Если $a \in X$ и $U \in \Theta_a$, то существует такое $W \in \Theta_a$, что для любой точки $x \in W$ существует такое $V \in \Theta_x$, что $V \subseteq U$.

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Доказательство. Рассмотрим совокупность τ всех таких подмножеств U множества X, которые удовлетворяют следующему условию:

(*) Для каждого $x \in U$ существует такое $V \in \Theta_x$, что $V \subseteq U$.

Проверим, что совокупность τ является топологией на X и для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Так как $\emptyset$ не содержит никаких элементов, то оно удовлетворяет условию (*), и значит, $\emptyset \in \tau$. Кроме того, для любого $a \in X$ множество Θ_a является непустым и значит, существует $V \in \Theta_a$. Так как $V \subseteq X$, то X удовлетворяет условию (*), и значит, $X \in \tau$.

Следовательно, τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $U, V \in \tau$ и $a \in U \cap V$. Тогда существуют такие $U_a \in \Theta_a$ и $V_a \in \Theta_a$, что $U_a \subseteq U$ и $V_a \subseteq V$. Согласно условию 2 формулировки теоремы, существует такое $W_a \in \Theta_a$, что $W_a \subseteq U_a \cap V_a$. Тогда $W_a \subseteq U_a \cap V_a \subseteq U \cap V$, и значит, $U \bigcap V \in \tau$, т.е. τ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$ и $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Тогда $a \in U_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$, и значит, существует такое $W \in \Theta_a$, что $W \subseteq U_{\gamma_0} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$, т.е. $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \in \tau$.

Следовательно, τ удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1.

Значит, τ является топологией на множестве X.

Проверим теперь, что для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Пусть $U \in \Theta_a$. Рассмотрим подмножество $U' = \{x \in U | \exists V \in \Theta_x, \mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}\}$.

Проверим, что $U' \in \tau$. Если $x \in U'$, то существует такое $V_x \in \Theta_x$, что $V_x \subseteq U$. По условию 3 (см. формулировку теоремы) существует такое $W_x \in \Theta_x$, что для любого $y \in W_x$ существует такое $W'_y \in \Theta_y$, что $W'_y \subseteq V_x$. Так как $W'_y \subseteq V_x \subseteq U$, то $W_x \subseteq \{y \in U | \exists V_y$, что $\mathrm{V}_y \subseteq U\} = U'$, и значит, $U' \in \tau$.

Так как $a \in U' \subseteq U$, то U является окрестностью точки a в топологическом пространстве (X, τ), т.е. Θ_a удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Пусть теперь $a \in X$ и W- произвольная окрестность точки a в (X, τ). Тогда (см. определение 2.1) существует такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq W$. Согласно условию (*), существует такое $V_a \in \Theta_a$, что $V_a \subseteq U \subseteq W$, и значит, Θ_a удовлетворяет и второму условию определения 2.4. Следовательно, совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Проверим теперь единственность топологии τ.

Пусть τ'- такая топология на множестве X, что для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ').

Если $U \in \tau$, то (см. выше определение τ, условие (*)) для любого $x \in U$ найдется такое $V_x \in \Theta_x$, что $V_x \subseteq U$. Так как Θ_x является базисом окрестностей точки x в топологическом пространстве (X, τ'), то V_x является окрестностью точки x в топологическом пространстве (X, τ'), и согласно утверждению 2.3.2, U является окрестностью точки x в топологическом пространстве (X, τ'). Из произвольности точки x (см. утверждение 2.3.4) следует, что $U \in \tau'$. Следовательно $\tau \subseteq \tau'$.

Если же $U' \in \tau'$, то согласно утверждению 2.3.4, U' является окрестностью любой точки $x \in U'$ в топологическом пространстве (X, τ'). Так как Θ_x является базисом окрестностей точки x в топологическом пространстве (X, τ'), то найдется такое $V_x \in B_x$, что $V_x \subseteq U'$. Тогда из произвольности элемента x следует, что $U' \in \tau$ (см. выше, определение τ, условие (*)). Следовательно $\tau' \subseteq \tau$, и значит, $\tau' = \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

3. ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВ.

3.1. **Определение**. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Множество A называется *замкнутым* в пространстве (X, τ), если $X \backslash A \in \tau$.

3.2. Упражнения. Доказать, что:

3.2.1. Если (X, τ) – произвольное топологическое пространство, то всё множество X и пустое множество являются замкнутыми множествами в пространстве (X, τ)

3.2.2. Если (X, τ) - антидискретное пространство и A - замкнутое множество в пространстве (X, τ), то либо $A = X$, либо $A = \emptyset$.

3.2.3. Если (X, τ) - дискретное пространство, то любое подмножество $A \subseteq X$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

3.2.4. Пусть $X = \{a, b\}$.

– Если $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{X, \emptyset\}$.

– Если $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, то замкнутыми множествами являются все подмножества множества X.

— Если $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$.

– Если $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$.

3.2.5. Если $X = \{a, b, c\}$ и $\tau_= \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

3.2.6. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Для каждой из топологий, указанных в примере 1.9, указать множество всех замкнутых множеств.

3.3. Теорема. Если X- *бесконечное множество и*

$$\tau = \{A \,|X \backslash A - \text{ конечное множество}\} \cup \{\emptyset\},$$

то подмножество $F \subseteq X$является замкнутым множеством в пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда F- конечное множество, либо $F = X$.

Необходимость. Пусть F - замкнутое в (X,τ) множество. Тогда $X\backslash F \in \tau$, и значит, либо $X\backslash F = \emptyset$ (в этом случае $F = X$), либо $F = X\backslash(X\backslash F)$ является конечным множеством.

Достаточность. Пусть $F = X$, либо F является конечным множеством. Если F - конечное множество, то $X\backslash F \in \tau$. Тогда $F = X\backslash(X\backslash F)$ является замкнутым множеством. Если же $F = X$, то (см. 3.2.1) F - замкнутое множество.

3.4. Теорема. *Если* $(\mathbb{R},\tau_{инт})$*- пространство действительных чисел с интервальной топологией, то следующие подмножества являются замкнутыми:*

– *Любой из полуинтервалов вида* $(-\infty,b]$ *и* $[a,\infty)$*;*
– *Любой отрезок* $[a,b]$, в частности, $\{a\} = [a,a]$
– *Объединение любого конечного числа отрезков.*

Доказательство. Так как $(-\infty,b] = \mathbb{R}\backslash(b,\infty) = \mathbb{R}\backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(b,b+i)$ и $[a,\infty) = \mathbb{R}\backslash(-\infty,a) = \mathbb{R}\backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a-i,a)$, то любой из указанных полуинтервалов является замкнутым множеством.

Для замкнутости любого отрезка $[a,b]$ достаточно доказать, что дополнение к нему является открытым множеством, т.е. $\mathbb{R}\backslash[a,b]$ является объединением интервалов. Это действительно так, ибо

$$\mathbb{R}\backslash [a,b] = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a-n,a)\right)\bigcup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(b,b+n)\right).$$

Так как $\mathbb{R}\backslash[a_i,b_i] \in \tau_{инт}$ для каждого $1 \le i \le k$, то согласно теоремы 1.2, $\mathbb{R}\backslash \bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_i,b_i] = \bigcap\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{R}\backslash[a_i,b_i]) \in \tau_{инт}$, и значит $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_i,b_i]$ является замкнутым множеством.

3.5. Теорема. *Если* (X,ρ)*- метрическое пространство ,* τ_ρ*- топология заданная метрикой* ρ (см. теорему 1.5.) *и* $a \in X$*, то для любого положительного числа* k *множество* $\{x \in X\,|\rho\,(a,x) \le k\}$ *является замкнутым множеством в топологическом пространстве* (X,τ_ρ)*.*

Доказательство: Пусть $S = \{x \in X\,|\rho\,(a,x) \le k\}$. Тогда $X\backslash S = \{z|\rho(a,z) > k\}$.

Если b - произвольный элемент из множества $X\backslash S$, то существует такое положительно число ε, что $\rho(a,b) > k+\varepsilon$. Тогда $\rho(a,x)+\rho(x,b) > \rho(a,b) > k+\varepsilon$, и значит, $\rho(a,x) > k+\varepsilon-\rho(x,b) > k+\varepsilon-\varepsilon = k$ для любого элемента $x \in \{y|\rho(b,y) < \varepsilon\}$. Значит, $V_b = \{y|\rho(b,y) < \varepsilon\} \subseteq X\backslash S$.Тогда (см. теорему 1.5) $X\backslash S \in \tau_\rho$, т.е. S является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ_ρ).

Этим теорема полностью доказана.

3.6. Теорема. *Если* (X, τ) - топологическое пространство, то верны следующие утверждения:

3.6.1. *Если A и B - замкнутые множества, то $A \cup B$ является замкнутым множеством;*

3.6. 2. *Если S - произвольная совокупность замкнутых множеств, то $\bigcap\limits_{F \in S} F$ является замкнутым множеством;*

3.6. 3. *Если* Φ - множество всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ), то $\tau = \{X\backslash F | F \in \Phi\}$ и $\Phi = \{X\backslash F | F \in \tau\}$

Доказательство:

3.6.1. Если A и B - замкнутые множества, то $X\backslash A \in \tau$ и $X\backslash B \in \tau$, причем $X\backslash (A \cup B) = (X\backslash A) \cap (X\backslash B)$, следовательно, согласно второй аксиоме определения топологического пространства, $(X\backslash A) \cap (X\backslash B) \in \tau$, т.е $A \cup B$ - замкнутое множество.

Этим утверждение 3.6.1 доказано.

3.6.2. Пусть теперь S - произвольная совокупность замкнутых множеств. Тогда $X\backslash \left(\bigcap\limits_{F \in S} F\right) = \bigcup\limits_{F \in S} (X\backslash F)$, и согласно третьей аксиоме определения топологического, пространства $\bigcup\limits_{F \in S} (X\backslash F) \in \tau$. Следовательно, $\bigcap\limits_{F \in S} F$ является замкнутым множеством.

3.6.3. Легко следует из определения 3.1.

Этим теорема полностью доказана.

3.7. Упражнение. Доказать, что объединение любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3.8. Теорема. *Пусть X - любое непустое множество и Φ - такая совокупность подмножеств множества X, что выполнены следующие условия:*

1) $\emptyset$ *и* $X \in \Phi$;

2) *Из того, что A и $B \in \Phi$ следует, что $A \cup B \in \Phi$;*

3) *Если S - произвольная совокупность подмножеств из Φ, то* $\bigcap\limits_{F \in S} F \in \Phi$.

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\tau = \{\, X \backslash F \,|F \in \Phi \,\}$, и проверим, что τ является топологией на множестве X и совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Так как $\emptyset = X \backslash X$ и $X = X \backslash \emptyset$, то $\emptyset, X \in \tau$, т.е. τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $A, B \in \tau$, то $A = X \backslash C$ и $B = X \backslash D$ для некоторых $C, D \in \Phi$. Тогда $A \bigcap B = (X \backslash C) \bigcap (X \backslash D) = X \backslash (C \bigcup D) \in \tau$, ибо $A \cup B \in \Phi$ (см. условие 2 в формулировке теоремы). Значит, τ удовлетворяет и второй аксиоме определения 1.1.

Если же $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$, то для каждого $\gamma \in \Gamma$, найдется такое $F_\gamma \in \Phi$, что $U_\gamma = X \backslash F_\gamma$. Тогда $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X \backslash F_\gamma = X \backslash (\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma) \in \tau$, ибо $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma \in \Phi$ (см. условие 3 в формулировке теоремы). Значит, τ удовлетворяет и третьей аксиоме определения 1.1.

Итак, мы доказали, что τ является топологией на множестве X.

Проверим теперь, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Если $F \in \Phi$, то $X \backslash F \in \tau$, и значит, F является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ), т.е. каждое множество из совокупности Φ является замкнутым в топологическом пространстве (X, τ).

Обратно, если A является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ), то $V = X \backslash A \in \tau$, и значит, $V = X \backslash B$ для некоторого $B \in \Phi$. Тогда $A = X \backslash (X \backslash A) = X \backslash V = B \in \Phi$.

Итак, мы доказали, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ).

Покажем теперь единственность топологии τ.

Пусть τ' - такая топология на множестве X, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ').

Тогда (см. 3.6.3) $\tau' = \{\, X \backslash F \,|F \in \Phi \,\}$ и поскольку $\tau = \{\, X \backslash F \,|F \in \Phi \,\}$, то $\tau = \tau'$.

Этим теорема полностью доказана.

3.9. Определение. Пусть (X,τ) - топологическое пространство, $M \subseteq X$ и $a \in X$. Точка a называется *точкой прикосновения к множеству* M в топологическом пространстве (X,τ), если $M \cap V \neq \emptyset$ для любой окрестности V точки a в топологическом пространстве (X,τ).

3.10. Определение. Пусть (X,τ) - топологическое пространство, и $M \subseteq A \subseteq X$. Если любая точка $a \in A$ является точкой прикосновения к множеству M, то M называется *плотным подмножеством* в множестве A.

Если же $A = X$, то в этом случае множество M называется *всюду плотным подмножеством* в топологическом пространстве (X,τ).

3.11. Упражнения. Доказать, что:

3.11.1. Если $(X,\tau\}$ - топологическое пространство и $M \subseteq X$, то любая точка x из множества M является точкой прикосновения к M.

3.11.2. Пусть (X,τ) - дискретное пространство (т.е. все подмножества множества X являются открытыми в (X,τ)) и $M \subseteq X$. Если a - точка прикосновения к M, то $a \in M$.

3.11.3. Если (X,τ) - дискретное пространство, $M \subseteq X$ и $a \in X$, то a является точкой прикосновения к множеству M тогда и только тогда, когда $a \in M$.

3.11.4. Если (X,τ) - антидискретное пространство и $\emptyset \neq M \subseteq X$, то любая точка из множества X является точкой прикосновения к подмножеству M (т.е. любое непустое подмножество является всюду плотным в пространстве (X,τ)).

3.11.5. Если (X,τ) - топологическое пространство и $a \in X$, то a не является точкой прикосновения к пустому множеству (т.е. пустое множество не имеет точек прикосновения).

3.11.6. Пусть $(\mathbb{R},\, \tau_{инт})$ - топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией. Если $M = (a,b) \neq \emptyset$, то a и b являются точками прикосновения к M (т.е. любой непустой интервал (a,b) является плотным подмножеством в отрезке $[a,b]$).

3.11.7. Пусть $(\mathbb{R},\, \tau_{инт})$ - топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией и $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел. Тогда любая точка $r \in \mathbb{R}$ является точкой прикосновения к множеству $\mathbb{Q}$, (т.е. $\mathbb{Q}$ является всюду плотным множеством в пространстве $(\mathbb{R},\, \tau_{инт})$).

3.12. Определение. Пусть (X,τ) - топологическое пространство и $M \subseteq X$. *Замыканием множества* M в топологическом пространстве (X,τ) называется множество всех точек прикосновения к множеству M.

3.13. Обозначения. Замыкание множества M в (X,τ) будем обозначать через $[M]_{(X,\tau)}$ или через $[M]_X$ или даже просто через $[M]$, если ясно о какой топологии в множестве X идёт речь или если ясно о каком топологическом пространстве идёт речь, соответственно.

3.14. Теорема. (Свойства замыкания). *Если* (X,τ)- *топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

3.14.1. Если $A \subseteq X$, то $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$;

3.14.2. *Если* $A \subseteq B \subseteq X$, *то* $[A]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$;

3.14.3. *Если* $A \subseteq X$ *и* $B \subseteq X$ *то* $[A \cup B]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Доказательство. Если $a \in A$, то согласно упражнению 3.11.1, a является точкой прикосновения к множеству A, и значит, $a \in [A]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента $a \in A$ следует, что $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$. Этим утверждение 3.14.1 доказано.

Пусть теперь $A \subseteq B \subseteq X$ и $c \in [A]_{(X,\tau)}$. Тогда c является точкой прикосновения к множеству A и, следовательно, любая окрестность V точки c имеет с A непустое пересечение. Тогда $\emptyset \neq V \cap A \subseteq V \cap B$, и значит, $V \cap B \neq \emptyset$, т. е c является точкой прикосновения к множеству B. Следовательно, $c \in [B]_{(X,\tau)}$. Из произвольности точки c следует, что $[A]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$. Этим утверждение 3.14.2 доказано.

Так как $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$, то согласно 3.14.2, $[A]_{(X,\tau)} \subseteq [A \cup B]_{(X,\tau)}$ и $[B]_{(X,\tau)} \subseteq [A \cup B]_{(X,\tau)}$. Тогда $[A \cup B]_{(X,\tau)} \supseteq [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Пусть теперь $c \in [A \cup B]_{(X,\tau)}$, докажем, что $c \in [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Предположим противное т.е., что $c \notin [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$. Тогда $c \notin [A]_{(X,\tau)}$ и $c \notin [B]_{(X,\tau)}$, и значит, существуют такие окрестности U и V точки c, что $U \cap A = \emptyset$ и $V \cap B = \emptyset$. Так как, согласно утверждению 2.3.3, $W = U \bigcap V$ является окрестностью точки c и

$W \bigcap (A \cup B) = (W \cap A) \cup (W \cap B) \subseteq \quad (U \cap A) \cup (V \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, то c не является точкой прикосновения к множеству $A \cup B$.

Получили противоречие с выбором точки c.

Следовательно, $[A \cup B]_{(X,\tau)} \subseteq [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$, и значит, $[A \cup B]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Этим утверждение 3.14.3 доказано.

3.15. Теорема. *Если (X, τ) - топологическое пространство и $F \subseteq X$, то множество F является замкнутым тогда и только тогда, когда $F = [F]_{(X,\tau)}$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть F является замкнутым множеством. Тогда, $V = X \backslash F \in \tau$, и значит, V является окрестностью любой точки $x \in V = X \backslash F$. Так как $F \bigcap V = F \bigcap (X \backslash F) = \emptyset$, то любая точка $x \in X \backslash F$ не является точкой прикосновения к множеству F, т.е. $x \notin [F]_{(X,\tau)}$. Значит $F \supseteq [F]_{(X,\tau)}$.

Так как, согласно 3.14.1, $F \subseteq [F]_{(X,\tau)}$, то $F = [F]_{(X,\tau)}$. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F \subseteq X$ и $F = [F]_{(X,\tau)}$. Нужно показать, что F - замкнутое множество, т.е. что$X \backslash F \in \tau$. Кроме того, так как $a \notin F = [F]_{(X,\tau)}$ для каждого элемента $a \in X \backslash F$, то a не является точкой прикосновения к множеству F, и значит, существует такая окрестность V точки a, что $F \cap V = \emptyset$. Тогда $V \subseteq X \backslash F$ и, согласно утверждению 2.3.2, $X \backslash F$ будет окрестностью точки a. Из произвольности точки a следует (см. утверждение 2.3.4), что $X \backslash F \in \tau$, и значит, F является замкнутым множеством.

Этим теорема полностью доказана.

3.16. Теорема. *Если (X, τ)- топологическое пространство и $A \subseteq X$, то $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством (т.е. замыкание любого множества является замкнутым множеством).*

Доказательство. Покажем, что $X \backslash [A]_{(X,\tau)} \in \tau$. В самом деле, если $b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}$, то b не является точкой прикосновения к множеству A, и значит, существует такая окрестность U_b точки b, что $U_b \bigcap A = \emptyset$ и существует такое $V_b \in \tau$, что $b \in V_b \subseteq U_b$. Тогда $V_b \cap A = \emptyset$.

Покажем, что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} = \emptyset$.

Допустим противное, т.е. что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$. Тогда существует такой элемент $c \in V_b \cap [A]_{(X,\tau)}$, и значит, $c \in [A]_{(X,\tau)}$, т.е. c является точкой прикосновения к множеству A. Так как $V_b \in \tau$, то V_b является окрестностью точки c, и значит, $V_b \cap A \neq \emptyset$. Получили противоречие с ранее доказанным что $V_b \cap A = \emptyset$.

Итак, мы доказали, что для любого элемента $b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}$, существует такое $V_b \in \tau$, что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} = \emptyset$, т.е. $V_b \subseteq X \backslash [A]_{(X,\tau)}$. Тогда

$$X \backslash [A]_{(X,\tau)} = \bigcup_{b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}} \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}} V_b \subseteq X \backslash [A]_{(X,\tau)},$$

и значит, $X\setminus[A]=\bigcup\limits_{b\in X\setminus[A]_{(X,\tau)}} V_b$. Тогда, согласно третьей аксиоме определения 1.1, $X\setminus[A]_{(X,\tau)}=\bigcup\limits_{b\in X\setminus[A]_{(X,\tau)}} V_b\in\tau$, и значит, $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством.

Этим теорема полностью доказана.

3.17. Следствие. *Если (X,τ) - топологическое пространство и $A\subseteq X$, то $\Big[[A]_{(X,\tau)}\Big]_{(X,\tau)}=[A]_{(X,\tau)}$.*

В самом деле, согласно теореме 3.16, $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X,τ) и, согласно теореме 3.15, $\Big[[A]_{(X,\tau)}\Big]_{(X,\tau)}=[A]_{(X,\tau)}$.

3.18.Теорема. *Пусть (X,τ) - топологическое пространство и $A\subseteq X$. Если Φ_A - совокупность всех таких замкнутых подмножеств $F\subseteq X$, что $A\subseteq F$, то $[A]_{(X,\tau)}=\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F$.*

Доказательство. Так как $[A]_{(X,\tau)}$ - замкнутое множество (см. теорему 3.16.) и $A\subseteq[A]_{(X,\tau)}$, то $[A]_{(X,\tau)}\in\Phi_A$. Тогда $[A]_{(X,\tau)}\supseteq\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F$.

Кроме того, всякое множество $F\in\Phi_A$ является замкнутым множеством и $A\subseteq F$. Тогда $\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F$, как пересечение замкнутых множеств, является замкнутым множеством (см. утверждение 3.6.2) и $A\subseteq\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F$, а потому

$[A]_{(X,\tau)}\subseteq\left[\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F\right]_{(X,\tau)}=\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F\subseteq[A]_{(X,\tau)}$, и значит, $[A]_{(X,\tau)}=\bigcap\limits_{F\in\Phi_A}F$.

Этим теорема полностью доказана.

3.19. Теорема. *Пусть X - произвольное непустое множество, $\widehat{X}$ - множество всех подмножеств множества* X и $\psi:\widehat{X}\to\widehat{X}$ *такое отображение, что выполняются следующие условия:*

1. $\psi(\emptyset)=\emptyset$ *и* $A\subseteq\psi(A)$ *для любого* $A\in\widehat{X}$;

2. *Если* $A,B\in\overleftarrow{X}$, *то* $\psi(A\cup B)=\psi(A)\cup\psi(B)$;

3. $\psi(A)=\psi(\psi(A))$ *для любого* $A\in\widehat{X}$.

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что $[A]_{(X,\tau)}=\psi(A)$ для любого $A\in\widehat{X}$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\Phi=\{A\subseteq X|\psi(A)=A\}$ и проверим, что она удовлетворяет условиям теоремы 3.8.

Так как $\psi(\emptyset) = \emptyset$, то $\emptyset \in \Phi$. Кроме того, согласно условию 1, $X \subseteq \psi(X) \subseteq X$, и значит, $X = \psi(X)$, т.е. $X \in \Phi$. Следовательно, первое условие теоремы 3.8 выполняется.

Пусть $A, B \in \Phi$. Тогда, учитывая условие 2, получаем, что $\psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B) = A \cup B$, и значит, $A \cup B \in \Phi$, т.е. второе условие теоремы 3.8 выполняется.

Пусть теперь $S = \{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ - произвольная совокупность подмножеств из совокупности Φ и $A = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Тогда $\psi(A) \subseteq \psi(A) \cup \psi(A_\gamma) = \psi(A \cup A_\gamma) = \psi(A_\gamma) = A_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $\psi(A) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A$. Так как, согласно условию 1, $A \subseteq \psi(A)$, то $A = \psi(A)$, и значит, $A \in \Phi$.

Этим доказано, что совокупность Φ удовлетворяет и третьему условию теоремы 3.8, и значит, на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Проверим теперь, что $[A]_{(X,\tau)} = \psi(A)$ для любого $A \subseteq X$.

В самом деле, так как, согласно условию 3, $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$, то $\psi(A) \in \Phi$, и значит, $\psi(A)$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ) и, поскольку, согласно условию 1, $A \subseteq \psi(A)$, то по теореме 3.18, $[A]_{(X,\tau)} \subseteq \psi(A)$.

Кроме того, так как $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в (X, τ), то $[A]_{(X,\tau)} \in \quad \Phi$, и значит, $\psi([A]_{(x,\tau)}) = [A]_{(x,\tau)}$. Согласно утверждению 3.14.1, $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$ и так как, согласно условию 2, $\psi(A) \cup \psi([A]_{(X,\tau)}) = \psi(A \cup [A]_{(X,\tau)}) = \psi([A]_{(X,\tau)})$, то $\psi(A) \supseteq \psi([A]_{(x,\tau)}) = [A]_{(X,\tau)}$, и значит, $[A]_{(X,\tau)} \subseteq \psi(A)$, и значит, $[A]_{(X,\tau)} = \psi(A)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить единственность топологии τ.

Пусть τ' - такая топология на множестве X, что $[A]_{(X,\tau')} = \psi(A)$ для любого $A \subseteq X$ и Φ' - совокупность всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ').

Если $F \in \Phi$', то $F = [F]_{(X,\tau')} = \psi(F) = F$, и значит, $F \in \Phi$ т.е. Φ' $\subseteq \Phi$.

Пусть теперь $F \in \Phi$. Тогда $F = \psi(F) = [F]_{(X,\tau')}$, и согласно теореме 3.15, $F \in \Phi$'. Из произвольности F следует, что $\Phi \quad \subseteq \Phi$', и значит, $\Phi \quad = \Phi$'.

Так как, согласно теореме 3.18, топология τ определяется единственным образом совокупностью всех замкнутых множеств, то $\tau = \tau'$.

3.20. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Подмножество $A \subseteq X$ называется *открыто-замкнутым* множеством в топологическом пространстве (X, τ), если A является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

3.21. Упражнения. Доказать, что:

3.21.1. Если (X, τ) - топологическое пространство, то в нём $\emptyset$ и X являются открыто-замкнутыми множествами;

3.21.2. В антидискретном пространстве (X, τ) множество A является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$, либо $A = X$;

3.21.3. В дискретном пространстве (X, τ) любое подмножество $A \subseteq X$ является открыто-замкнутым;

3.21.4. Если $X = \{a, b\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то совокупность $\{X, \emptyset\}$ будет множеством всех открыто-замкнутых множеств;

3.21.5. Если $X = \{a, b, c\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, то совокупность $\{X, \emptyset\}$ будет множеством всех открыто-замкнутых множеств.

3.22. Упражнение. Для $X = \{a, b, c\}$ и каждой из топологий, указанной в упражнении 1.9, указать множество всех открыто-замкнутых множеств.

3.23. Теорема. *Если* $\{(a_\gamma, b_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *- некоторая совокупность интервалов во множестве* $\mathbb{R}$ *действительных чисел, каждый из которых содержит число* d *(т.е.* $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \neq \emptyset$*), то* $S = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$ *является интервалом (возможно бесконечным интервалом).*

Доказательство. Пусть $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $b = \sup\{b_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (здесь может быть $a = -\infty$ или $b = \infty$). Покажем, что $S = (a, b)$.

Пусть $c \in (a, b)$. Тогда $a < c < b$. Если $c \leq d$, то существует такое γ_0, что $a_{\gamma_0} < c$. Тогда $a_{\gamma_0} < c \leq d < b_{\gamma_0}$, и значит, $c \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$.

Аналогично, если $c \geq d$, то существует такое γ_1, что $c < b_{\gamma_1}$. Тогда $a_{\gamma_1} < d \leq c < b_{\gamma_1}$, и значит $c \in (a_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$. Из произвольности числа c следует, что $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \supseteq (a, b)$.

Пусть теперь $c \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$. Тогда найдется такой элемент $\gamma_0, \in \Gamma$, что $c \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$, и значит, $a \leq a_{\gamma_0} < c < b_{\gamma_1} \leq b$, т.е. $c \in (a, b)$. Следовательно, $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \subseteq (a, b)$, и значит $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) = (a, b)$.

Этим теорема полностью доказана.

3.24. Теорема. *Если* $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$*- топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией и* A *- открыто-замкнутое множество в нем, то* $A = \emptyset$ *или* $A = \mathbb{R}$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ имеется открыто-замкнутое множество A, отличное от пустого множества и от всего $\mathbb{R}$.

Выберем некоторый элемент $d \in A$ и рассмотрим совокупность $\Delta = \{(a_\gamma, b_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ всех таких интервалов (a_γ, b_γ), которые содержат элемент d и содержатся во множестве A.

Тогда, согласно теореме 3.23, объединение всех этих интервалов является интервалом (a, b), где $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $b = \sup\{b_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (здесь может быть $a = -\infty$ или $b = \infty$). Так как $A \neq \mathbb{R}$, то либо $a \neq -\infty$, либо $b \neq \infty$.

Если $a \neq -\infty$, то, согласно упражнению 3.11.6, число a является точкой прикосновения к интервалу (a, b), и поскольку $(a, b) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \subseteq A$, то a является точкой прикосновения и к множеству A.

Так как A является замкнутым множеством в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$, то $a \in A$. Тогда, из открытости множества A следует, что $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Так как $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $a - \varepsilon < a \leq a_{\gamma_0} < a + \varepsilon$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \neq \emptyset$, и значит (см. теорему 3.23), $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cup (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$ является интервалом, содержащим точку d и содержащимся в A. Получили противоречие с определением числа a. Значит $a = -\infty$.

Аналогично доказывается, что $b = \infty$.

Получили противоречие с тем, что, либо $a \neq -\infty$, либо $b \neq \infty$.

Этим теорема полностью доказана.

4. ПОДПРОСТРАНСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА.

4.1. Теорема. *Пусть* (X, τ) *- топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Если* $\tau|_A = \{A \cap U \,|U \in \tau\}$, *то* $(A, \tau|_A)$ *- топологическое пространство.*

Доказательство. Для совокупности $\tau|_A$ проверим выполнимость трёх аксиом определения топологического пространства (см. определение 1.1)

Так как $\emptyset = \emptyset \cap A$ и $A = X \cap A$, то $\emptyset \in \tau|_A$ и $A \in \tau|_A$, т.е. $\tau|_A$ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $B, C \in \tau|_A$, то существуют такие $\widehat{B} \in \tau$ и $\widehat{C} \in \tau$, что $B = A \cap \widehat{B}$ и $C = \widehat{C} \cap A$. Тогда $\widehat{B} \cap \widehat{C} \in \tau$, и значит, $B \cap C = \left(\widehat{B} \cap A\right) \cap \left(\widehat{C} \cap A\right) = \left(\widehat{B} \cap \widehat{C}\right) \cap A \in \tau|_A$, т.е. $\tau|_A$ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Если теперь $\{B_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau|_A$, то для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует такое $\widehat{B}_\gamma \in \tau$, что $B_\gamma = \widehat{B}_\gamma \cap A$. Тогда $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} (A \cap \widehat{B}_\gamma) = A \cap \left(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma\right)$, и так как $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma \in \tau$, то $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = A \cap (\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma) \in \tau|_A$.

Значит, $(A, \tau|_A)$ является топологическим пространством.

4.2. Определение. Если (X, τ) - топологическое пространство и $A \subseteq X$, то $(A, \tau|_A)$ называется *подпространством топологического пространства* (X, τ).

4.3. Упражнения. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Доказать, что:

4.3.1. Если (X, τ) - дискретное пространство, то и $(A, \tau|_A)$ является дискретным пространством;

4.3.2. Если (X, τ) - антидискретное пространство, то $(A, \tau|_A)$ будет антидискретным пространством;

4.3.3. Если $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - пространство действительных чисел с интервальной топологией и $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, то $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}|_{\mathbb{Z}})$ - дискретное пространство.

4.4. Теорема. *Пусть* (X,τ)*- топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Подмножество* $F \subseteq A$ *будет замкнутым в* $(A, \tau\,|_A)$ *тогда и только тогда, когда существует такое замкнутое в* (X,τ) *подмножество* B *что* $F = A \cap B$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество $F \subseteq A$ является замкнутым в $(A, \tau\,|_A)$. Тогда $A\backslash F \in \tau\,|_A$, и значит, существует такое $V \in \tau$, что $A\backslash F = A \cap V$. Тогда $B = X\backslash V$ является замкнутым множеством в (X,τ), причем

$$A \cap B = A \cap (X\backslash V) = (A \cap X) \setminus (A \cap V) = A \setminus (A \cap V) = A \setminus (A\backslash F) = F,$$

т.е. $F = A \cap B$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F = A \cap B$, где B замкнутое подмножество в пространстве (X,τ). Тогда $X\backslash B = U \in \tau$, и значит, $(X\backslash B) \cap A \in \tau\,|_A$. Так как $(X\backslash B) \cap A = (X \cap A) \setminus (B \cap A) = A\backslash F$, то F является замкнутым в пространстве $(A, \tau\,|_A)$.

4.5. Теорема. *Пусть* (X,τ) *- топологическое пространство, и* $A \subseteq X$. *Если* $a \in A$ *, то подмножество* $U \subseteq A$ *является окрестностью точки* a *в подпространстве* $(A, \tau\,|_A)$ *тогда и только тогда, когда существует такая окрестность* $\widehat{V}$ *точки* a *в пространстве* (X,τ) *, что* $U = A \cap \widehat{V}$.

Доказательство.

Необходимость. Если U является окрестностью точки a в $(A, \tau\,|_A)$, то существует такое множество $W \in \tau\,|_A$, что $a \in W \subseteq U$. Тогда существует такое множество $V \in \tau$, что $W = V \cap A$. Рассмотрим множество $\widehat{V} = V \cup U$. Тогда, $a \in V \subseteq \widehat{V}$, и значит, $\widehat{V}$ является окрестностью точки a в пространстве (X,τ), причем $A \cap \widehat{V} = A \cap (V \cup U) = (A \cap V) \cup (A \cap U) = W \cup U = U$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $U = A \cap \widehat{V}$, где $\widehat{V}$ - окрестность точки a в пространстве (X,τ). Тогда, существует такое множество $W \in \tau$, что $a \in W \subseteq \widehat{V}$. Так как $a \in A$, то $a \in W \cap A \subseteq \widehat{V} \cap A = U$. Поскольку $W \cap A \in \tau\,|_A$, то U является окрестностью точки a в $(A, \tau\,|_A)$.

Этим теорема полностью доказана.

4.6. Теорема. *Пусть* (X,τ) *- топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Если* $B \subseteq A$, *то* $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Доказательство. Пусть $b \in [B]_{(A,\tau|_A)}$. Тогда b является точкой прикосновения к множеству B в топологическом пространстве $(A,\tau|_A)$. Если U - окрестность точки b в (X,τ), то, согласно теореме 4.5, $U \cap A$ является окрестностью точки b в $(A,\tau|_A)$ и, значит, $(U \cap A) \cap B \neq \emptyset$. Тогда $U \cap B \supseteq (U \cap A) \cap B$, и значит, $U \cap B \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности U следует, что b является точкой прикосновения к множеству B в пространстве (X,τ) , т.е. $b \in [B]_{(X,\tau)}$. Так как $b \in [B]_{(A,\tau|_A)} \subseteq A$, то $b \in A \cap [B]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента b следует, что $[B]_{(A,\tau|_A)} \subseteq A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Пусть теперь $b \in A \cap [B]_{(X,\tau)}$. Тогда $b \in A$. Проверим, что b является точкой прикосновения к множеству B в топологическом пространстве $(A,\tau|_A)$. Если U - окрестность точки b в $(A,\tau|_A)$, то существует такая окрестность V точки b в (X,τ) , что $U = A \cap V$(см. теорему 4.5). Так как b - точка прикосновения к B в (X,τ) , то $V \cap B \neq \emptyset$. Но $B \subseteq A$, значит,

$$\emptyset \neq V \cap B = \quad (B \cap A) \cap V = B \cap (A \cap V) = B \cap U,$$

т.е. $U \cap B \neq \emptyset$. Следовательно, любая окрестность точки b в пространстве $(A,\tau|_A)$ имеет с множеством B непустое пересечение, т.е. b - точка прикосновения к множеству B в пространстве $(A,\tau|_A)$, и значит, $b \in [B]_{(A,\tau|_A)}$. Из произвольности точки b следует, что $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq A \cap [B]_{(X,\tau)}$, и значит, $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

4.7. Теорема. *Пусть* (X,τ) *- топологическое пространство, и* A *- открытое множество в* (X,τ). *Если* $a \in A$, и U *является окрестностью точки* a *в* $(A,\tau|_A)$, *то* U*- окрестность точки* a *в пространстве* (X,τ).

Доказательство. Так как U является окрестностью точки a в $(A,\tau|_A)$, то по теореме 4.5, существует такая окрестность V точки a в (X,τ) , что $U = A \cap V$. Так как $a \in A$ и $A \in \tau$, то A - окрестность точки a в (X,τ). Тогда (см. утверждение 2.3.3) $V \cap A$ - окрестность точки a в пространстве (X,τ), и значит, U - окрестность точки a в (X,τ) .

Этим теорема полностью доказана.

4.8. Теорема. *Если* (X,τ) *- топологическое пространство и* A *- замкнутое множество в* (X,τ) , *то верны следующие утверждения:*

4.8.1. *Если* F*- замкнутое множество в пространстве* $(A, \tau\,|_A)$, *то* F *является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ);

4.8.2. *Для любого* $B \subseteq A$ *верно, что* $[B]_{(A,\tau|_A)} = [B]_{(X,\tau)}$.

Доказательство. Если F - замкнутое множество в пространстве $(A, \tau\,|_A)$, то, по теореме 4.4,. в пространстве (X, τ) существует такое замкнутое множество B, что $F = A \cap B$. Так как A - замкнутое множество в пространстве (X, τ), то $F = A \cap B$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

Этим утверждение 4.8.1 доказано.

Докажем вначале включение $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq [B]_{(X,\tau)}$.

По теореме 3.16, множество $[B]_{(A,\tau|_A)}$ является замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau\,|_A)$, и по утверждению 4.8.1, $[B]_{(A,\tau|_A)}$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ). Так как $B \subseteq [B]_{(A,\tau|_A)}$ то согласно утверждению 3.14.2 и теореме 3.15,

$$[B]_{(X,\tau)} \subseteq \quad \left[[B]_{(A,\tau|_A)}\right]_{(X,\tau)} = [B]_{(A,\tau|_A)},$$

т.е. $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq [B]_{(X,\tau)}$.

Докажем обратное включение. Так как, согласно теореме 3.16, $[B]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), то $A \cap [B]_{(X,\tau)}$ будет замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau\,|_A)$. Тогда по теореме 4.6, $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$. Значит $[B]_{(A,\tau|_A)} = [B]_{(X,\tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

5. ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

5.1. Определения.

5.1.1. Если X, Y - произвольные множества и f - некоторое правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ (будем писать $y = f(x)$), то f называется *отображением* множества X в множество Y и обозначается $f : X \to Y$.

Если X и Y - это множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, то понятие отображения совпадает с понятием функции.

5.1.2. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюрьективным отображением* (или другими словами - *сюръекцией, или отображением на*), если любой элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$.

5.1.3. Отображение $f : X \to Y$называется *иньективным* отображением (или другими словами - *иньекцией*), если из того, что $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y.

5.1.4. *Биективным отображением* называется отображение, которое является иньективным и сюрьективным отображением (т.е. является взаимнооднозначным отображением на).

5.2. Примеры:

1) Пусть X - множество стульев, а Y - множество студентов в данной аудитории. Если f - правило, которое каждому стулу ставит в соответствие студента, который сидит на этом стуле, то f не будет отображением, так как есть стулья, на которых никто не сидит.

Но если бы все стулья были заняты студентами, то f было бы отображением и даже биекцией.

2) Пусть X - множество столов, а Y - множество стульев в данной аудитории. Если f - правило, которое каждому столу ставит в соответствие стулья, которые находятся возле данного стола, то f не будет отображением, так как около стола имеется больше, чем один стул.

5.3. Определение. Пусть X, Y - любые множества и $f : X \to Y$, тогда:

5.3.1. Если $A \subseteq X$, то множество $\{f(x)\,|x \in A\}$ называется *образом множества* A при отображении f и обозначается $f(A)$.

5.3.2. Если $B \subseteq Y$, то множество $\{x \in X\,|f\,(x) \in B\}$ называется *прообразом множества* B при отображении f и обозначается $f^{-1}(B)$.

Выражение $f^{-1}(B)$ нужно рассматривать как единное целое выражение и это, в оличие от 5.4, не означает, что имеется отображение f^{-1}.

5.4. Определение. Пусть X, Y - любые множества, $\varphi : Y \to X$ и $f : X \to Y$.

Каждое из отображений f и φ называются *обратными* к другому из этих отображений, если $f(\varphi(y)) = y$ и $\varphi(f(x)) = x$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

В этом случае будем писать $\varphi = f^{-1}$ и $f = \varphi^{-1}$.

5.5. Упражнение. Доказать, что если X, Y - любые множества и $f : X \to Y$, то для отображения f существует обратное отображение $\varphi : Y \to X$ тогда и только тогда, когда f является биективным отображением.

5.6. Обозначение. Пусть X, Y - любые множества. Если $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$, то $f : A \to Y$ является отображением и его будем обозначать через $f\,|_A$.

5.7. Упражнения. Пусть $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ **и** $\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ - любые совокупности подмножеств множеств X и Y, соответственно, и $f : X \to Y$. Доказать верность следующих утверждений:

5.7.1. $A_\gamma \subseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$ и $A_\gamma = f^{-1}(f(A_\gamma))$, если f является инъективным отображением;

5.7.2. $B_\gamma \supseteq f(f^{-1}(B_\gamma))$ и $B_\gamma = f(f^{-1}(B_\gamma))$, если f является сюръективным отображением;

5.7.3. $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ и $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, если f является инъективным отображением;

5.7.4. $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$;

5.7.5. $f(A_{\gamma_1} \backslash A_{\gamma_2}) \supseteq f(A_{\gamma_1}) \backslash f(A_{\gamma_2})$ и $f(A_{\gamma_1} \backslash A_{\gamma_2}) = f(A_{\gamma_1}) \backslash f(A_{\gamma_2})$, если f является инъективным отображением;

5.7.6. $f(X \backslash A_\gamma) \supseteq f(X) \backslash f(A_\gamma)$ и $f(X \backslash A_\gamma) = Y \backslash f(A_\gamma)$, если f является биективным отображением;

5.7.7. $f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}) = f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, в частности, $f^{-1}(Y \backslash B_\gamma) = X \backslash f^{-1}(B_\gamma)$;

5.7.8. $f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$**;**

5.7.9. $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$**;**

5.7.10. Привести примеры, показывающие, что являются существенными:

– Требование инъективности отображения f в 5.7.1, в 5.7.3, в 5.7.5;
– Требование сюръективности отображения f в 5.7.2;
– Требование биективности отображения f в 5.7.6.

5.8. Определение. Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, $a \in X$ и $f : X \to Y$. Отображение f называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2) существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$.

5.9. Замечание. Если вместо топологических пространств (X, τ_1) и (Y, τ_2) взять пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ действительных чисел с интервальной топологией и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то f является функцией и понятие непрерывного отображения в точке совпадает с понятием непрерывности функции в точке.

5.10. Определение. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, и $f : X \to Y$, то отображение f называется *непрерывным отображением топологического пространства* (X, τ_1) *в топологическое пространство* (Y, τ_2), если f является непрерывным отображением в любой точке $x \in X$.

5.11. Упражнения:

5.11.1. Пусть X, Y - произвольные множества и $f : X \to Y$. Если τ_1 - дискретная топология на множестве X, а τ_2 - любая топология на множестве Y, то $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.

5.11.2. Пусть X и Y - произвольные множества и $f : X \to Y$. Если τ_1 - любая топология на множестве X, а τ_2 - антидискретная топология на множестве Y, то $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение.

5.11.3. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - пространство действительных чисел с интервальной топологией, и $f(x) = x^2$. Тогда $f : (\mathbb{R}, \tau_{инт}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$ является непрерывным отображением.

5.12. Теорема. (Критерий непрерывности отображения в точке). *Пусть* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *- топологические пространства.* Если $a \in X$ *и* $f : X \to Y$, *то отображение* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *является непрерывным в точке* $a \in X$ *тогда и только тогда, когда* $f^{-1}(U)$ *является окрестностью точки* a *в пространстве* (X, τ_1) *для любой окрестности* U *точки* $f(a)$ *в пространстве* (Y, τ_2).

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение в точке $a \in X$ и U - окрестность точки $f(a)$ в (Y, τ_2). Тогда, согласно определению 5.8, существует такая окрестность V точки a в (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$, и значит, $V \subseteq f^{-1}(f(V) \subseteq f^{-1}(U)$. По утверждению 2.3.2, $f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_1).

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f : X \to Y$ - такое отображение, что $f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_1) для любой окрестности U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2).

Тогда, если U - произвольная окрестность точки точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), то $V = f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в (X, τ_1), причем $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U$, т.е. отображение f является непрерывным в точке a.

Этим теорема полностью доказана.

5.13. Теорема. (Критерий непрерывности отображения). *Если* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *- топологические пространства, и* $f : X \to Y$ *- произвольное отображение, то следующие условия эквивалентны:*

1) $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *- непрерывное отображение;*

2) *Если* $U \in \tau_2$, *то* $f^{-1}(U) \in \tau_1$ *(т.е. прообраз любого открытого множества является открытым множеством);*

3) *Если* F *- замкнутое множество в пространстве* (Y, τ_2), *то* $f^{-1}(F)$ *является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ_1), *т.е. прообраз любого замкнутого множества является замкнутым подмножеством;*

4) $f\left([M]_{(X,\tau_1)}\right) \subseteq [f(M)]_{(Y,\tau_2)}$ *для любого подмножества* $M \subseteq X$.

Доказательство.

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным и $U \in \tau_2$. Если $f^{-1}(U) = \emptyset$, то $f^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_1$. Если же $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ и

$a \in f^{-1}(U)$, то $f(a) \in f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U$. Так как $U \in \tau_2$, то U - окрестность точки $f(a)$ в (Y, τ_2).

Согласно теореме 5.12, $f^{-1}(U)$ - окрестность точки a в пространстве (X, τ_1), и значит, $f^{-1}(U)$ является окрестностью любой своей точки. Тогда, согласно утверждению 2.3.4, $f^{-1}(U) \in \tau_1$.

Этим доказано, что 1⇒2.

Пусть отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 2 и F - замкнутое множество в пространстве (Y, τ_2). Тогда $U = Y \backslash F \in \tau_2$ и согласно условию 2, $f^{-1}(Y \backslash F) \in \tau_1$. Так как, согласно упражнению 5.7.7, $f^{-1}(Y \backslash F) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(F) = X \backslash f^{-1}(F)$, то $X \backslash f^{-1}(F) \in \tau_1$, и значит, $f^{-1}(F)$ является замкнутым множество в пространстве (X, τ_1).

Этим доказано, что 2⇒3.

Пусть отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 3 и $M \subseteq X$. Тогда, согласно теореме 3.16, $F = [f(M)]_{(Y,\tau_2)}$ является замкнутым множеством в пространстве (Y, τ_2), и по условию 3, $f^{-1}(F)$ - замкнутое множество в пространстве (X, τ_1).

Так как $f(M) \subseteq [f(M)]_{(Y,\tau_2)} = F$, то $M \subseteq f^{-1}(F)$. Поскольку $f^{-1}(F)$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ_1), то согласно утверждению 3.14.2 и теореме 3.15, $[M]_{(X,\tau_1)} \subseteq [f^{-1}(F)]_{(X,\tau_1)} = f^{-1}(F)$, и значит, $f\left([M]_{(X,\tau_1)}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(F)\right) \subseteq F = [f(M)]_{(Y,\tau_2)}$.

Этим доказано, что 3⇒4.

Пусть теперь отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 4. Покажем, что отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.

Допустим противное, т.е. что отображения $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ не является непрерывным в некоторой точке $a \in X$. Тогда существует такая окрестность U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), что $f(V) \not\subseteq U$ для любой окрестности V точки a в пространстве (X, τ_1), и значит, $f(V) \backslash U \neq \emptyset$. Выберем некоторый элемент $b_V \in V$ такой, что $f(b_V) \notin U$.

Если Δ - множество всех окрестностей точки a в пространстве (X, τ_1), то рассмотрим множество $M = \{b_V | V \in \Delta\}$. Так как $b_V \in V \cap M$ для любой окрестности V точки a в пространстве (X, τ_1), то $a \in [M]_{(X,\tau_1)}$. Тогда $f(a) \in f([M]_{(X,\tau_1)}) \subseteq [f(M)]_{(Y,\tau_2)}$, и значит, $f(a)$ является точкой прикосновения к множеству $f(M)$ в пространстве (Y, τ_2).

Так как U является окрестностью точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), то $U \cap f(M) \neq \emptyset$, и значит, $f(b_V) \in U \cap f(M)$ для некоторого $V \in \Delta$. Получили противоречие с тем, что $f(b_V) \notin U$ для любого $V \in \Delta$.

5.14. Определение. Отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ называется:

5.14.1. *Открытым отображением*, если $f(U) \in \tau_2$ для любого $U \in \tau_1$, т.е. образ открытого множества является открытым;

5.14.2. *Замкнутым отображением*, если $f(F)$ является замкнутым подмножеством в пространстве (Y, τ_2) для любого замкнутого множества F в пространстве (X, τ_1), т.е. образ замкнутого множества является замкнутым.

5.15. Упражнения. Доказать, что:

5.15.1. Если (X, τ_1) - любое топологическое пространство и (Y, τ_2) - дискретное пространство, то любое отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является открытым отображением и является замкнутым отображением;

5.15.2. Если (X, τ_1) - антидискретное пространство и (Y, τ_2) - произвольное топологическое пространство, то любое сюръективное отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является открытым отображением и является замкнутым отображением.

5.15.3. Пусть $f : X \to Y$ - биективное отображение и $f^{-1} : Y \to X$ - обратное к нему отображение (см. 5.4). Если τ_1 и τ_2 - топологии на X и Y, соответственно, то следующие утверждения эквивалентны:
1) $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением;
2) $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является открытым отображением;
3) $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является замкнутым отображением.

5.16. Определение. Отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ называется *гомеоморфизмом*, если f - биекция и f является непрерывным и открытым отображением, т.е. f - биекция и $\tau_2 = \{f(U) \,|U \in \tau_1\}$.

5.17. Замечание. Так как исходным понятием в топологии является открытое множество и все остальные понятия и результаты сводятся к нему, а гомеоморфизм - это такое биективное отображение, которое переводит множество всех открытых множеств одного пространства в множество всех открытых множеств другого пространства, то гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами.

Поэтому в общей топологии, иногда, гомеоморфные пространства отождествляются.

5.18 . Теорема. *Если* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$*- непрерывное отображение и* $B = f(X)$*, то* $f : (X, \tau_1) \to (B, \tau_2|_B)$ *является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и U - окрестность точки $f(a)$ в пространстве $(B, \tau_2|_B)$. Тогда (см. теорему 4.5), существует такая окрестность W точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), что $U = W \cap B$.

Так как $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение, то существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq W$. Тогда $f(V) \subseteq W \cap f(X) = W \cap B = U$. Из произвольности точки a и окрестности U следует, что $f : (X, \tau_1) \to (B, \tau_2|_B)$ является непрерывным отображением.

Этим теорема полностью доказана.

5.19. Теорема. *Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение и $A \subseteq X$, то $f\,|_A : (A, \tau_1|_A) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и U - произвольная окрестность точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2). Тогда существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$. Так как $W = A \cap V$ является окрестностью точки a в $(A, \tau_1|_A)$, и $f|_A(W) = f(V \cap A) \subseteq f(V) \subseteq U$, то $f\,|_A : (A, \tau_1|_A) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение.

5.20. Теорема. *Пусть X, Y - произвольные непустые множества, и $f : X \to Y$. Если τ_2 - некоторая топология на множестве Y, то совокупность $\tau_f = \{f^{-1}(U)\,|U \in \tau_2\}$ является топологией на множестве X.*

Доказательство. Проверим, что совокупность τ_f удовлетворяет аксиомам определения топологического пространства.

Так как $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \tau_f$ и $X = f^{-1}(Y) \in \tau_f$, то совокупность τ_f удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $A, B \in \tau_f$, то существуют такие $U, V \in \tau_2$, что $A = f^{-1}(U)$ и $B = f^{-1}(V)$. Тогда $U \cap V \in \tau_2$, и значит, $A \cap B = f^{-1}(U) \cap \quad f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \in \tau_f$, т.е. совокупность τ_f удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $S \subseteq \tau_f$. Тогда для каждого $A \in S$ существует $U_A \in \tau_2$, такое что $A = f^{-1}(U_A)$. Так как $\left(\bigcup\limits_{A \in S} U_A\right) \in \tau_2$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = \bigcup\limits_{A \in S} f^{-1}(U_A) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{A \in S} U_A\right) \in \tau_f$, и значит, совокупность τ_f удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1.

Этим теорема полностью доказана.

5.21. Определение. Указанная в предыдущей теореме топология τ_f на множестве X называется *прообразом топологии* τ_2 *относительно отображения* f.

5.22. Теорема. *Пусть* X *и* Y *- произвольные множества, и* $f : X \to Y$ *- сюръективное отображение. Если* τ_2 *- топология на* Y *и* $\tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\}$*- прообраз топологии на* X *относительно отображения* f*, то* $f : (X, \tau_f) \to (Y, \tau_2)$ *является непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Если $U \in \tau_2$, то $f^{-1}(U) \in \tau_f$, и значит, прообраз любого открытого множества является открытым множеством. Тогда, согласно теореме 5.13, отображение $f : (X, \tau_f) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным.

Пусть теперь W - открытое множество в пространстве (X, τ_f), т.е. $W \in \tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\}$. Тогда существует такое $U_0 \in \tau_2$, что $W = f^{-1}(U_0)$. Так как (см. упражнение 5.7.2) $f(W) = f\left(f^{-1}(U_0)\right) = U_0 \in \tau_2$, то отображение f является открытым.

Этим теорема полностью доказана.

5.23. Упражнения. Доказать, что:

5.23.1. Если $f : X \to Y$ и τ_2 - антидискретная топология на множестве Y, то τ_f является антидискретной топологией на множестве X;

5.23.2. Если $f : X \to Y$ и τ_2 - дискретная топология на множестве Y и $f : X \to Y$ является инъективным отображением, то τ_f будет дискретной топологией на множестве X;

5.23.3. Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ и $\varphi : (Y, \tau_2) \to (Z, \tau_3)$ - непрерывные отображения, то $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ будет непрерывным отображением:

5.23.4. Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ и $\varphi : (Y, \tau_2) \to (Z, \tau_3)$ - открытые отображения, то $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ будет открытым отображением;

5.23.5. Если $f_i : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ - непрерывные отображения для $1 \le i \le n$ и $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ для любого $x \in X$, то отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным отображением.

6. СРАВНЕНИЯ ТОПОЛОГИЙ.

6.1. Определение. Пусть на непустом множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2. Говорим, что топология τ_1 *слабее топологии* τ_2 и пишем $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (т.е. всякое открытое множество в пространстве (X, τ_1) будет открытым и в пространстве (X, τ_2)).

6.2. Упражнения. Доказать, что:

6.2.1. Если X- произвольное непустое множество, τ_1- любая топология на X и τ_2 - дискретная топология на X, то $\tau_1 \leq \tau_2$ (т.е. дискретная топология является наибольшей из всех топологий).

6.2.2. Если X- произвольное непустое множество, τ_1- антидискретная топология на X и τ_2 - произвольная топология на X, то $\tau_1 \leq \tau_2$ (т.е. антидискретная топология является наименьшей из всех топологий).

Определение. Как обычно, отображение $f : X \to X$ называется *тождественным*, если $f(x) = x$ для любого $x \in X$.

6.4. Теорема. *(Критерий сравнимости топологий). Пусть X - произвольное непустое множество, $f : X \to X$- тождественное отображение. Если τ_1 и τ_2- топологии на множествеX, то следующие утверждения эквивалентны:*

1.$\tau_1 \leq \tau_2$;

2.$f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ *является непрерывным отображением;*

3. Для любого $a \in X$ всякая окрестность элемента $a = f(a)$ в пространстве (X, τ_1) является окрестностью элемента a в пространстве (X, τ_2) .

Доказательство. Доказательство проведем по схеме 1 ⇒2⇒3⇒1.

Пусть $\tau_1 \leq \tau_2$ и U- открытое множество в пространстве (X, τ_1), т.е. $U \in \tau_1$. Так как f- тождественное отображение, то $f^{-1}(U) = U \in \tau_1 \subseteq \tau_2$, т.е. $f^{-1}(U)$ является открытым множеством в (X, τ_2). Тогда, согласно теореме 5.13, отображение $f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является непрерывным. Этим доказано то, что 1⇒2.

Пусть теперь$f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является непрерывным отображением и $a \in X$. Если U окрестность элемента $a = f(a)$ в пространстве (X, τ_1), то, согласно теореме 5.13, $U = f^{-1}(U)$ является окрестностью элемента

a в пространстве (X, τ_2). Из произвольности множества U следует, что 2$\Rightarrow$3 доказано.

Пусть теперь верно утверждение 3 и $U \in \tau_1$. Согласно утверждению 2.3.4, U является окрестностью любой своей точки в пространстве (X, τ_1). Тогда согласно утверждению 3, U будет окрестностью любой своей точки в пространстве (X, τ_2), и значит, согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_2$.

Из произвольности U следует, что $\tau_1 \leq \tau_2$.

Этим теорема полностью доказана.

6.5. Определение. Как обычно, непустое множество S называется *частично упорядоченным* множеством, если между некоторыми его элементами установлен порядок, т.е. такое бинарное отношение $\leq$, что выполнены следующие условия:

1) $a \leq a$ для любого $a \in S$;
2) Если $a \leq b$ и $b \leq c$ для $a, b, c \in S$, то $a \leq c$;
3) Если $a \leq b$ и $b \leq a$ для $a, b \in S$, то $a = b$.

6.6. Упражнения. Выяснить являются ли следующие множества, с указанными бинарными отношениями, частично упорядоченными:

6.6.1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка;

6.6.2. Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Введём на нём бинарное отношение следующим образом:

Считаем, что $a \leq b$, если b *делится на* a.

6.6.3. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел. Введём на нём бинарное отношение следующим образом: *Считаем, что* $a \leq b$, если b *делится на* a.

6.6.4. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел. Введём на нём бинарное отношение следующим образом: *будем считать, что* $a \leq b$, если $b = a^k$ *для некоторого* $k \in \mathbb{Z}$.

6.6.5. Пусть S - множество всех топологий на некотором непустом множестве X и $\leq$ бинарное отношение, определенное в 6.1.

6.7. Определение. Элемент a частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется *точной нижней гранью непустого множества* $M \subseteq S$ в множестве $(S, \leq)$, если выполняются следующие два условия:

1) $a \leq b$ для любого $b \in M$;
2) Если $c \in S$ и $c \leq b$ для любого $b \in M$, то $c \leq a$.

Это будем записывать: $a = \inf M$.

6.8. Определение. Элемент d частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется *точной верхней гранью непустого множества* $M \subseteq S$ в множестве $(S, \leq)$, если выполняются следующие два условия:

1) $d \geq b$ для любого $b \in M$;

2) Если $c \in S$ и $c \geq b$ для любого $b \in M$, то $c \geq d$.

Это будем записывать: $d = \sup M$.

6.9. Упражнения. Найти $\inf M$ и $\sup M$ или доказать, что они не существуют в следующих случаях:

6.9.1. $(\mathbb{R}, \leq)$ множество действительных чисел с обычным порядком и M - множество рациональных чисел из интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6.9.2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ множество рациональных чисел с обычным порядком и M - множество рациональных чисел из интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6.10. Замечание. Требование чтобы $M \neq \emptyset$ в определениях 6.7 и 6.8 является существенным, ибо для $\emptyset$ не существуют ни $\inf \emptyset$ и ни $\sup \emptyset$.

6.11. Теорема. *Пусть $X \neq \emptyset$ и Δ - множество всех топологий на множестве X. Тогда для любого непустого подмножества $M \subseteq \Delta$ существует такая топология $\tau_0 \in \Delta$, что $\tau_0 = \inf M$ (т.е. для любого непустого множества топологий существует точная нижняя грань).*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq M \subseteq \Delta$ и $\tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$. Докажем, что τ_0 является топологией на множествеX:

Так как $\emptyset, X \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, то $X \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$, и $\emptyset \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$. Этим проверили верность первой аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Пусть теперь $A, B \in \tau_0$. Тогда$A, B \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $A \cap B \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда $A \cap B \in \tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$. Этим проверили верность второй аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Если $S \subseteq \tau_0$, то $S \subseteq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$. Этим проверили верность и третьей аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Следовательно, $\tau_0 \in \Delta$.

Проверим теперь, что $\tau_0 = \inf M$, т.е. что τ_0 удовлетворяет условиям определения 6.7

В самом деле, так как $\tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$, то $\tau_0 \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, т.е. первое условие определения 6.7 выполнено.

Кроме того, если $\tau' \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, то $\tau' \subseteq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $\tau' \subseteq \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$, т.е. $\tau' \leq \tau_0$. Этим проверили верность и второго условия определения 6.7.

Этим теорема полностью доказана.

6.12. Теорема. *Пусть $X \neq \emptyset$ и Δ - множество всех топологий на множестве X. Если $\emptyset \neq \mathrm{M} \subseteq \Delta$, то существует такая топология $\tau_1 \in \Delta$, что $\tau_1 = \sup M$, (т.е. для любого непустого множества топологий существует точная верхняя грань).*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathrm{M}' = \{\tau' \in \Delta \,|\tau' \geq \tau \quad \forall \tau \in M\ \}$. Множество $\mathrm{M}' \neq \emptyset$, т.к. дискретная топология принадлежит M'. Согласно предыдущей теореме, существует $\tau* = \inf M'$.

Покажем, что $\tau*$ удовлетворяет условиям определения 6.8.

В самом деле, если $\tau \in M$, то $\tau' \geq \tau$ для любого $\tau' \in \mathrm{M}'$. Так как $\tau* = \inf M'$, то, согласно второму условию определения 6.7, $\tau* \geq \tau$. Этим проверили, что $\tau*$ удовлетворяет первому условию определения 6.8.

Пусть теперь $\tau_0 \in \Delta$ такая топология, что $\tau_0 \geq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда $\tau_0 \in \mathrm{M}'$ и, поскольку $\tau* = \inf M'$, то $\tau* \leq \tau_0$. Этим проверили, что $\tau*$ удовлетворяет и второму условию определения 6.8.

Следовательно $\tau* = \sup M$.

6.13. Теорема. *Пусть S - некоторое непустое множество топологий на множестве X и $\tau* = \sup S$. Если $U \subseteq X$, то $U \in \tau*$ тогда и только тогда, когда U удовлетворяет следующему условию:*

(*) Для любого элемента $a \in U$ существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть подмножество $U \subseteq X$ удовлетворяет условию (*) и a - произвольный элемент из U. Если $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ - такие топологии из S и $U_1, \cdots, U_n$ - такие окрестности элемента a в топологических пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$, то из того, что $\tau* \geq \tau$, для любой топологии $\tau \in S$, из теоремы 6.4 следует, что $U_1, \cdots, U_n$ являются окрестностями элемента a в пространстве $(X, \tau*)$.

Тогда, согласно утверждению 2.3.3, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ является окрестностью элемента a в пространстве $(X, \tau*)$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$, то согласно утверждению 2.3.2 , U является окрестностью элемента a в пространстве $(X, \tau*)$.

Итак, мы получили, что U является окрестностью любого своего элемента в пространстве $(X, \tau*)$. Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau*$.

Этим достаточность доказана.

Необходимость. Пусть σ - совокупность всех подмножеств $U \subseteq X$, которые удовлетворяют условию (*).

Покажем вначале, что σ - топология на множестве X, т.е. что σ удовлетворяет условиям 1 – 3 определения 1.1.

Легко заметить, что $\emptyset$ и X удовлетворяют условию (*), и значит, $\emptyset \in \sigma$ и $X \in \sigma$, т.е. σ удовлетворяет первому условию определения 1.1.

Пусть теперь, $A \in \sigma$ и $B \in \sigma$. Если $a \in A \cap B$ то существуют такие топологии $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq A$.

Аналогично, существуют такие топологии $\tau_1', \tau_2', ..., \tau_k' \in S$ и такие окрестности $U_1', \cdots, U_k'$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1'), \cdots, (X, \tau_k')$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i' \subseteq B$.

Тогда, $\{\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_1', \ldots, \tau_k'\}$ - конечное множество топологий из множества S и $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i') \subseteq A \cap B$. Из произвольности элемента a следует, что $A \cap B$ удовлетворяет условию (*), и значит, $A \cap B \in \sigma$. Следовательно, совокупность σ удовлетворяет и второму условию определения 1.1.

Пусть теперь $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \sigma$ и $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Тогда $a \in U_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$, и значит, существуют такие топологии $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в топологических пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{\gamma_0} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Из произвольности элемента a следует, что $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ удовлетворяет условию (*), и значит, $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \in \sigma$. Следовательно, совокупность σ удовлетворяет и третьему условию определения 1.1.

Этим мы доказали, что σ является топологией на множестве X.

Покажем теперь, что $\tau* = \sigma$.

Пусть $W \in \sigma$ и $d \in W$. Тогда существуют такие топологии $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq W$. Так как $\tau* = \sup S \geq \tau_i$, для $1 \leq i \leq n$, то $U_1, \cdots, U_n$ являются окрестностями элемента d в пространстве $(X, \tau*)$. Тогда (см. теорему 2.3), $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$. Значит, W будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$.

Итак, мы доказали, что W будет окрестностью любой своей точки в пространстве $(X, \tau*)$, т.е. $W \in \tau*$.

Из произвольности W следует, что $\tau* \supseteq \sigma$, т.е. $\tau* \geq \sigma$.

Кроме того, так как для любой топологии $\tau \in S$ произвольное множество $U \in \tau$ удовлетворяет условию (*), то $U \in \sigma$, и значит $\sigma \geq \tau$ для любой топологии $\tau \in S$. Из того, что $\tau* = \sup S$ и второго условия определения 6.8, следует, что $\tau* \leq \sigma$, и значит $\tau* = \sigma$.

Этим теорема полностью доказана.

6.14. Теорема. *Пусть S - некоторое непустое множество топологий на множестве X и $\tau* = \sup S$. Если $d \in X$, то подмножество $W \subseteq X$ является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и существуют такие окрестности $W_1, \cdots, W_n$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество $W \subseteq X$ является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$ тогда существует такое $U \in \tau*$, что $d \in U \subseteq W$. Согласно теореме 6.13, существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$. Тогда, согласно утверждению 2.3.2, для каждого $1 \leq i \leq n$ подмножество $W_i = U_i \cup W$ будет окрестностью элемента d в пространстве (X, τ_i), причем $W \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cup W) = (\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i) \cup W = U \cup W = W$, т.е .$W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

Достаточность. Если для множества W существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $W_1, \cdots, W_n$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$, то из теоремы 6.4 и неравенства $\tau* \geq \tau_i$ для любого $1 \leq i \leq n$ следует, что каждое из подмножеств W_i является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$. Тогда $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$.

Этим теорема полностью доказана.

6.15. Следствие. *Пусть* $S = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ *- некоторое непустое конечное множество топологий на множестве* X *и* $\tau^* = \sup S$. *Если* $d \in X$ *, то подмножество* $W \subseteq X$ *будет окрестностью элемента* d *в пространстве* $(X, \tau*)$ *тогда и только тогда, когда существуют такие окрестности* $W_1, \cdots, W_n$ *элемента* d *в топологических пространствах* $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, *соответственно, что* $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

В самом деле, согласно предыдущей теореме множество $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$.

Кроме того, если W является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$, то, согласно предыдущей теореме, существует такое конечное множество топологий $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k\} \subseteq \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ и такие окрестности $W_1, \cdots, W_k$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$ соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$. Если для каждого $k < i \leq n$ возьмем $W_i = X$, то получим, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

7. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ.

7.1. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Говорим, что в пространстве (X, τ) выполняется аксиома отделимости:

7.1.1 *Аксиома* T_0, Если для любых различных точек $a, b \in X$ хотя бы одна из этих точек имеет окрестность, не содержащую вторую точку.

7.1.2 Пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_0, будем называть еще T_0-*пространством.*

7.1.3 *Аксиома* T_1, Если для любых различных точек $a, b \in X$ каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

7.1.4 Пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_1, будем называть еще T_1-*пространством.*

7.1.5 *Аксиома* T_2, Если для любых различных точек $a, b \in X$ существуют такие окрестности U и V элементов a и b соответственно, что $U \cap V = \emptyset$;

7.1.6 Топологическое пространство, в котором выполняется аксиома T_2, называется еще *хаусдорфовым пространством.*

7.1.7 *Аксиома* T_3, Если для любого замкнутого множества F и произвольной точки $d \notin F$ существуют такие множества $U, V \in \tau$, что $F \subseteq U$, $d \in V$ и $U \cap V = \emptyset$;

7.1.8 Пространство, в котором выполняются аксиомы T_1 и T_3, называется *регулярным пространством.*

7.1.9 *Аксиома* T_4, Если для любых непересекающихся замкнутых множеств A *и* B в пространстве (X, τ) существуют такие множества $U, V \in \tau$, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$;

7.1.10 Пространство, в котором выполняются аксиомы T_1 и T_4, называется *нормальным пространством.*

7.1.11 Топологическое пространство (X, τ) называется *вполне регулярным*, если в нём выполняется аксиома T_1 и для любого замкнутого множества F и произвольного элемента $d \notin F$ существует непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ такое, что $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого $x \in X$, $f(d) = 0$ и $f(F) \subseteq \{1\}$.

Ясно, что если $F \neq \emptyset$, то $f(F) = \{1\}$, и значит $f(x) = 1$ для любого $x \in F$.

7.2. Теорема. *Если (X,τ) - топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

7.2.1. *(X,τ) является T_0 пространством, тогда и только тогда, когда для любых $a \neq b \in X$ либо $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, либо $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$;*

7.2.2. *(X,τ) является T_1 пространством, тогда и только тогда, когда всякое одноэлементное множество является замкнутым;*

7.2.3. *(X,τ) является T_3 пространством, тогда и только тогда, когда любая точка обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых множеств.*

Доказательство.

Доказательство утверждения 7.2.1.

Пусть (X,τ) является T_0 пространством и $a \neq b \in X$. Тогда, либо a обладает окрестностью, которая не содержит b, либо b обладает окрестностью, которая не содержит a.

Если a обладает окрестностью, которая не содержит b, то a не является точкой прикосновения к множеству $\{b\}$, и значит, $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$.

Аналогично, если b обладает окрестностью, которая не содержит a, то b не является точкой прикосновения к множеству $\{a\}$, и значит, $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$.

Этим достаточность для утверждения 7.2.1 доказана.

Пусть теперь в топологическом пространстве (X,τ) выполняется условие:

для любых $a \neq b \in X$ либо $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, либо $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$.

Если $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, то $a \in X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)}$. Так как $X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)} \in \tau$, то $X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)}$ является окрестностью точки a, которая не содержит b.

Аналогично доказывается, что если $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$, то $X \backslash [\{a\}]_{(X,\tau)}$ является окрестностью точки b, которая не содержит a.

Этим утверждение 7.2.1 полностью доказано.

Доказательство утверждения 7.2.2.

Если (X,τ) является T_1 пространством и $a \neq b \in X$, то элемент b обладает такой окрестностью V в пространстве (X,τ), что $a \notin V$. Тогда $V \cap \{a\} = \emptyset$, и значит, $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента $b \in X$ следует, что $\{a\} = [\{a\}]_{(X,\tau)}$, и значит, (см. теорему 3.15), $\{a\}$ является замкнутым множеством в пространстве (X,τ).

Из произвольности элемента a следует, что для утверждения 7.2.2 достаточность доказана.

Пусть теперь в пространстве (X,τ) всякое одноэлементное множество является замкнутым и $a \neq b \in X$. Тогда $b \in X\backslash\{a\} \in \tau$, и согласно утверждению 2.3.4, $X\backslash\{a\}$ является окрестностью элемента b, причем $a \notin X\backslash\{a\}$. Аналогично доказывается, что $X\backslash\{b\}$ является окрестностью элемента a, причем $b \notin X\backslash\{b\}$.

Этим утверждение 7.2.2 полностью доказано.

Доказательство утверждения 7.2.3.

Если (X,τ) является T_3 пространством и $a \in X$, то рассмотрим совокупность $B_a = \{[U]_{(X,\tau)} | U\text{-}\textit{окрестность точки} \quad a\}$ и проверим, что B_a является базисом окрестностей точки a.

Так как $U \subseteq [U]_{(X,\tau)}$, то любое множество из совокупности B_a является окрестностью точки a, т.е. первое условие определения 2.4 выполняется.

Пусть теперь V - произвольная окрестность точки a, и $W \in \tau$ - такое множество, что $a \in W \subseteq V$. Тогда $F = X\backslash W$ является замкнутым множеством, причем $a \notin F$. Так как (X,τ) является T_3 пространством, то существуют такие $\widehat{V}, \widehat{U} \in \tau$, что $a \in \widehat{U}$, $F \subseteq \widehat{V}$ и $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$. Тогда $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \in B_a$. Так как $\widehat{V}$ является окрестностью любого элемента $x \in F$, то любой элемент $x \in F$ не является точкой прикосновения к множеству $\widehat{U}$, и значит, $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \cap F = \emptyset$. Тогда $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \subseteq X\backslash F = W \subseteq V$.

Следовательно, и второе условие определения 2.4 выполняется, значит, B_a является базисом окрестностей точки a.

Этим мы доказали достаточность для утверждения 7.2.3.

Пусть теперь в пространстве (X,τ) любая точка обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых подмножеств. Если $a \in X$ и F - такое замкнутое множество в пространстве (X,τ), что $a \notin F$, то $a \in U = X\backslash F \in \tau$, и значит, U является окрестностью точки a в пространстве (X,τ).

Согласно условию теоремы, существует такая замкнутая окрестность V точки a в пространстве (X,τ), что $V \subseteq U$. Тогда $W = X\backslash V \in \tau$ и $F = X\backslash U \subseteq X\backslash V = W$.

Согласно определению 2.1, существует такое $V' \in \tau$, что $a \in V' \subseteq V$. Так как $V' \cap W \subseteq V \cap (X\backslash V) = \emptyset$, то, из произвольности элемента a и множества F, следует регулярность пространства (X,τ).

Этим теорема полностью доказана.

7.3. Теорема. *Если (X,τ) - топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

7.3.1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$;

7.3.2. *Во всяком регулярном пространстве выполняется аксиома* T_2;

7.3.3. *Всякое вполне регулярное пространство является регулярным пространством;*

7.3.4. *Всякое нормальное пространство является вполне регулярным.*

Доказательство.

Верность утверждения 7.3.1 легко следует из определений аксиом T_2, T_1 и T_0.

Пусть теперь (X, τ) является регулярным пространством. Тогда в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1. Если $a \neq b \in X$, то согласно утверждению 7.2.2, $F = \{b\}$ является замкнутым множеством и $a \notin F$.

Так как в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_3, то имеются такие открытые множества U и V, что $a \in U$, $F \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда U и V являются окрестностями точек a и b соответственно, и значит, в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_2.

Этим утверждение 7.3.2 доказано.

Пусть теперь (X, τ) является вполне регулярным пространством. Тогда, в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1.

Если F- замкнутое множество в (X, τ) и $d \notin F$, то существует такое непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$, что $f(d) = 0, f(F) \subseteq \{1\}$. Возьмём в пространстве (R, τ) в качестве окрестности точки 0 интервал $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \tau_{инт}$, а в качестве окрестности точки 1 интервал $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in \tau_{инт}$. Так как $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ является непрерывным отображением, то $U = f^{-1}(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right))$ является открытым множеством в (X, τ) и $d \in U$. Аналогично, $\mathrm{V} = \mathrm{f}^{-1}(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right))$ является открытым множеством в (X, τ) и $F \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq V$. Так как (см. упражнение 5.7.4) $U \cap V = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, то выполняется аксиома T_3.

Следовательно, пространство (X, τ) является регулярным.

Этим мы доказали утверждение 7.3.3.

Доказательство утверждения 7.3.4 является несколько громоздким, и мы (в рамках этого курса) не будем его доказывать.

7.4. Упражнения. Проверить какие аксиомы отделимости выполняются в следующих топологических пространствах:

7.4.1. X содержит больше чем 1 элемент и (X, τ) - антидискретное пространство.

7.4.2. (X, τ) - дискретное пространство.

7.4.3. $X = \{a, b\}$, и $\tau = \{\{a\}, X, \emptyset\}$.

7.4.4. X- бесконечное множество и
$\tau = \{A\,|X \backslash A$ - *конечное множество*$\} \cup \{\emptyset\}$.

7.5. Упражнения. Используя упражнения 7.4, показать, что:
Существует пространство, которое не является T_0 пространством.

7.6. Замечание. Можно показать, что все аксиомы отделимости являются различными.

7.7. Упражнение. Показать, что:

7.7.1. Каждая из аксиом T_0, T_1, T_2 сохраняются при усилении топологии.

7.7.2. Каждая из аксиом T_0, T_1, T_2, T_3, регулярность и вполне регулярность сохраняются при взятии подпространства.

7.8. Упражнение. Используя упражнения 7.4, показать, что аксиомы T_3 и T_4 не сохраняются при усилении топологии.

7.9. Замечание. Существуют топологические пространства, в которых выполняется аксиома T_4, и содержащие подпространства в которых аксиома T_4 не выполняется, т.е. подпространство T_4-пространства может не быть T_4-пространством.

7.10. Теорема. *Если X- конечное множество и τ- такая топология, что пространство (X, τ) является T_1-* пространством, *то (X, τ) является дискретным пространством.*

Доказательство. Согласно утверждению 7.2.2, в пространстве (X, τ) любое одноэлементное множество $\{a\}$ является замкнутым. Тогда если $A \subseteq X$, то, ввиду конечности множества X, множество $B = X \backslash A = \bigcup\limits_{a \in B} \{a\}$ будет замкнутым множеством как объединение конечного числа замкнутых множеств (см. упражнение 3.7), и значит, $A \in \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

8. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА.

8.1. Определение. Совокупность Δ подмножеств множества X называется *покрытием множества* X, если $\bigcup\limits_{U\in\Delta} U = X$.

Если Δ - покрытие множества X, то подмножество $\Omega \subseteq \Delta$ называется *подпокрытием покрытия* Δ, если Ω само является покрытием множества X, т.е. если $\bigcup\limits_{U\in\Omega} U = X$.

8.2. Определение. Пусть (X,τ) - топологическое пространство и Δ - покрытие множества X. Если $\Delta \subseteq \tau$ (т.е. все подмножества, входящие в Δ, являются открытыми в пространстве (X,τ)), то покрытие Δ называется *открытым покрытием* топологического пространства (X,τ).

8.3. Определения.

8.3.1. Топологическое пространство (X,τ) называется *компактным*, если из любого открытого покрытия пространство (X,τ) можно извлечь конечное подпокрытие, т.е. если для любой системы $\{U_\alpha \,|\alpha \in A\}$ подмножеств множества X, для которой выполняются условия:

1. $U_\alpha \in \tau$ для любого $\alpha \in A$;
2. $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = X$

существует такое конечное подмножество $\{\alpha_1, .., \alpha_n\} \subseteq A$, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$.

8.3.2. Подмножество S топологическое пространство (X,τ) называется *компактным множеством*, если пространство $(S,\tau|_S)$ (см. 4.2) является компактным.

8.4. Упражнения. Доказать компактность следующих топологических пространств:

8.4. 1. (X,τ) - антидискретное пространство.

8.4. 2. Если X - конечное множество, то в любой топологии τ пространство (X,τ) является компактным.

8.4. 3. В любом топологическом пространстве (X,τ) всякое конечное подмножество S, является компактным множеством.

8.4. 4. Если X - бесконечное множество и
$\tau = \{A \subseteq X | X\backslash A$ конечное множество$\} \cup \{\emptyset\}$ (см. 1.3.7),
то (X,τ) - компактное пространство.

8.5. Теорема. *Дискретное пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда X - конечное множество.*

Доказательство. Если X - конечное множество, то согласно упражнению 8.4.2, (X, τ) является компактным пространством.

Пусть теперь дискретное пространство (X, τ) является компактным пространством.

Из дискретности пространства (X, τ) следует, что $\{x\} \in \tau$ для каждого элемента $x \in X$. Так как $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\}$, то $\{\{x\} | x \in X\}$ является открытым покрытием топологического пространства (X, τ) и тогда из компактности пространства (X, τ) следует, что существуют такие $x_1, x_2, .., x_n \in X$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, .., x_n\}$, т.е. X является конечным множеством.

8.6. Теорема. *Подмножество S топологического пространства (X, τ) является компактным, тогда и только тогда, когда в любой такой совокупности Δ открытых множеств пространства (X, τ), что $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$ имеется такая конечная совокупность $\{U_1, \cdots, U_k\} \subseteq \Delta$, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество S топологическое пространство (X, τ) является компактным множеством. Если Δ - такая совокупность открытых множеств в пространстве (X, τ), что $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$, то $\Lambda = \{S \cap U | U \in \Delta\}$ является открытым покрытием пространства $(S, \tau|_S)$. Из компактности пространства $(S, \tau|_S)$ следует, что существует конечное подпокрытие $\{S \cap U_1, \cdots, S_k \cap U_k) \subseteq \Lambda$ пространства $(S, \tau|_S)$. Тогда $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (S \cap U_i) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть S - такое подмножество топологического пространства (X, τ), что в любой совокупности Δ открытых множеств пространства (X, τ) такой, что $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$ имеется такая конечная совокупность $\{U_1, \cdots, U_k\} \subseteq \Delta$, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$.

Если Λ - произвольное открытое покрытие топологического пространства $(S, \tau|_S)$, то для каждого $V \in \Lambda$ существует такое $U_V \in \tau$, что

$V = S \cap U_V$. Тогда $S = \bigcup\limits_{V \in \Lambda} V \subseteq \bigcup\limits_{V \in \Lambda} U_V$ и согласно условию теоремы, существует такая конечная совокупность $\{U_{V_1}, \cdots, U_{V_k}\}$, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{V_i}$, и значит, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (S \cap U_{V_i}) = \quad S \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{V_i}) = S$. Из произвольности покрытия Λ следует компактность пространства $(S, \tau|_S)$, и значит, S является компактным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

8.7. Определение. Пусть X- некоторое непустое множество и Φ - непустая совокупность подмножеств множества X. Говорим, что Φ является *фильтром на множестве* X, если выполняются следующие условия:

1. $\emptyset \notin \Phi$;
2. Если $A, B \in \Phi$, то $A \cap B \in \Phi$;
3. Если $A \in \Phi$ и $A \subseteq B \subseteq X$, то $B \in \Phi$.

8.8. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

8.8.1. Если $X \neq \emptyset$ и $a \in X$, то совокупность $\Phi_a = \{A \subseteq X \,| a \in A\}$ является фильтром.

8.8.2. Если (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$, то совокупность $\Phi_a = \{U \subseteq X \,| U$ - окрестность точки a в $(X, \tau)\}$ является фильтром в множестве X.

8.9. Теорема. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $M \subseteq X$. Если a - точка прикосновения к множеству M, то совокупность*

$\Phi_a = \{U \cap M \,| U$ - окрестность точки a в пространстве $(X, \tau)\}$

является фильтром в множестве M.

Доказательство. Так как a является точкой прикосновения к множеству M, то $M \cap U \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки a в пространстве (X, τ), и значит, $\emptyset \notin \Phi_a$, т.е. для совокупности Φ_a первое условие определения 8.7 выполняется.

Пусть $A, B \in \Phi_a$ и $C = A \cap B$. Тогда $A = M \cap V$ и $B = M \cap U$ для некоторых окрестностей U, V точки a в пространстве (X, τ). Согласно утверждению 2.3.3, $W = U \cap V$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и $C = A \cap B = (M \cap V) \cap (M \cap U) = M \cap (U \cap V) = M \cap W \in \Phi_a$.

Этим мы проверили, что для совокупности Φ_a выполняется второе условие определения 8.7.

Пусть $A \in \Phi_a$ и $A \subseteq B \subseteq M$. Тогда $A = M \cap V$ для некоторой окрестности V точки a в пространстве (X, τ). Согласно утверждению 2.3.2, $U = V \cup B$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ) и

$B = A \cup B = (M \cap V) \cup (M \cap B) = M \cap (V \cup B) = M \cap U \in \Phi_a$.

Этим мы проверили, что для совокупности Φ_a выполняется и третье условие определения 8.7, и значит, совокупность Φ_a является фильтром в множестве M.

Этим теорема полностью доказана.

8.10. Определение. Пусть $X \neq \emptyset$ и Φ - фильтр на множестве X. Совокупность Δ подмножеств множества X называется *базисом фильтра* Φ, если выполняются следующие условия:

1) $\Delta \subseteq \Phi$;

2) Для любого $A \in \Phi$ существует такое $\mathrm{B} \in \Delta$, что $\mathrm{B} \subseteq A$.

8.11. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

8.11.1. Если Δ **-** базис некоторого фильтра Φ на множестве X, то для любого конечного числа множеств $A_1, \cdots, A_n \in \Delta$ существует такое множество $A \in \Delta$, что $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

8.11.2. Пусть $X \neq \emptyset$ и $a \in X$. Если $\Phi_a = \{A \subseteq X \,|a \in A\}$, то совокупность $\mathrm{B} = \{\{a\}\}$ является базисом фильтра Φ_a.

8.11.3. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$. Если $\Phi'_a = \{U \subseteq X \,|U$ - окрестность точки a в $(X, \tau)\}$, и B' - базис окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ) (см. 2.4), то B' является базисом фильтра (см. 8.8.2) Φ'_a.

8.12. Теорема. *Если X- произвольное непустое множество, то непустая совокупность Δ подмножеств множества X, является базисом некоторого фильтра Φ на множестве X тогда и только тогда, когда $\emptyset \notin \Delta$ и для любых множеств $A_1, A_2 \in \Delta$ существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть Δ является базисом некоторого фильтра Φ. Так как $\Delta \subseteq \Phi$ и $\emptyset \notin \Phi$, то $\emptyset \notin \Delta$.

Если теперь $A_1, A_2 \in \Delta$, то $A_1, A_2 \in \Phi$, и значит (см. 8.7), $A_1 \cap A_2 \in \Phi$. Так как Δ является базисом фильтра Φ, то существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть Δ - такая совокупность подмножеств множества X, что $\emptyset \notin \Delta$ и для любых множеств $A_1, A_2 \in \Delta$ существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$. Рассмотрим совокупность $\Phi = \{C \subseteq X|$ существует $A \in \Delta$, такое что $A \subseteq C\}$.

Проверим вначале, что Φ является фильтром на множестве X.

Так как $\Delta \neq \emptyset$, то существует такое $A \subseteq X$, что $A \in \Delta$. Тогда $X \in \Phi$, и значит, $\Phi \neq \emptyset$. Поскольку любое множество из совокупности Φ содержит некоторое множество из совокупности Δ, и $\emptyset \notin \Delta$, то $\emptyset \notin \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет первому условию определения 8.7.

Пусть теперь $A, B \in \Phi$ и $A', B' \in \Delta$ такие, что $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$. Согласно условию теоремы, существует такое $C \in \Delta$, что $C \subseteq A' \cap B'$. Тогда $C \subseteq A' \cap B' \subseteq A \cap B$, и значит, $A \cap B \in \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет второму условию определения 8.7.

Пусть $A \in \Phi$ и $A \subseteq B \subseteq X$. Если $A' \in \Delta$ - такое множество, что $A' \subseteq A$, то $A' \subseteq B$, и значит, $B \in \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет и третьему условию определения 8.7.

Следовательно, Φ является фильтром на множестве X.

Так как согласно определению совокупности Φ, любое множество из Φ содержит некоторое множество из совокупности Δ и $\Delta \subseteq \Phi$, то Δ является базисом фильтра Φ.

Этим теорема полностью доказана.

8.13. Теорема. *Топологическое пространство* (X, τ) *является компактным пространством тогда и только тогда, когда* $\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$ *для любой совокупности* Δ*, которая является базисом некоторого фильтра* Φ.

Доказательство.

Необходимость. Допустим противное, т.е. что в некотором компактном пространстве (X, τ) существует такая совокупность Δ, которая является базисом некоторого фильтра Φ на множестве X и $\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} = \emptyset$.

Для каждого $U \in \Delta$ рассмотрим множество $V_U = X \backslash [U]_{(X,\tau)}$. Так как $[U]_{(X,\tau)}$является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), то $V_U \in \tau$, причем $\bigcup\limits_{U \in \Delta} V_U = \bigcup\limits_{U \in \Delta} X \backslash [U]_{(X,\tau)} = X \backslash \bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} = X \backslash \emptyset = X$, т.е. $\left\{ X \backslash [U]_{(X,\tau)} | U \in \Delta \right\}$ является открытым покрытием пространства (X, τ). Из компактности пространства (X, τ) следует существование конечного подпокрытия $\{X \backslash [U_1]_{(X,\tau)}, \cdots, X \backslash [U_n]_{(X,\tau)}\} \subseteq \Delta$, т.е $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \backslash [U]_{(X,\tau)}) = X$.

Согласно утверждению 8.11.1, существует такое $A \in \Delta$, что $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $\emptyset \neq A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i]_{(X,\tau)} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(X \backslash (X \backslash [U_i]_{(X,\tau)}\big) = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \backslash [U_i]_{(X,\tau)}) = X \backslash X = \emptyset$.

Полученное противоречие, завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$ в топологическом пространстве (X, τ) для любой совокупности Δ, которая является базисом некоторого фильтра Φ. Покажем, что (X, τ) является компактным пространством.

Допустим противное, т. е. существует открытое покрытие $\{U_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ пространства (X, τ), из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Рассмотрим множество $\widehat{\Gamma}$ всех конечных подмножеств множества Γи для каждого $\widehat{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n\} \in \widehat{\Gamma}$ рассмотрим множество $A_{\widehat{\gamma}} = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$. Согласно допущению, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} \neq X$. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} \in \tau$, то каждое $A_{\widehat{\gamma}}$ является непустым замкнутым множеством в пространстве (X, τ), и значит, $A_{\widehat{\gamma}} = [A_{\widehat{\gamma}}]_{(X,\tau)}$.

Так как $A_{\{\gamma_1,..,\gamma_n\}} \cap A_{\{\gamma'_1,..,\gamma'_k\}} = A_{\{\gamma_1,..,\gamma_n,\gamma'_1,\cdots,\gamma'_k\}} \in \Delta$, то согласно теореме 8.12, Δ является базисом некоторого фильтра на множестве X, и согласно условию теоремы, $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} [A_{\widehat{\gamma}}]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$. Легко заметить, что $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_{\{\gamma\}}$.

Тогда $X = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (X \backslash A_\gamma) = X \backslash \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_{\{\gamma\}} = X \backslash \bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}}$, и значит, $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \emptyset$.

Получили противоречие с ранее доказанным.

Этим теорема полностью доказана.

8.14. Теорема. *Пусть* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *- топологические пространства и* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$*- непрерывное отображение. Если* A *является компактным подмножеством в топологическом пространстве* (X, τ_1), *то* $B = f(A)$ *будет компактным подмножеством в топологическом пространстве* (Y, τ_2).

Доказательство. Пусть $\{U_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ - такая совокупность открытых подмножеств в пространстве (Y, τ_2), что $B \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Из непрерывности отображения $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ (см. теорему 5.13) следует, что $V_\gamma = f^{-1}(U_\gamma)\in\tau_1$ для каждого $\gamma\in\Gamma$, причем $A\subseteq f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(U_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$.

Так как множество A является компактным в пространстве (X,τ_1), то из теоремы 8.6 следует существование такого конечного числа элементов $\gamma_1,...,\gamma_n\in\Gamma$, что $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}$. Тогда $B=f(A)\subseteq f(\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}f(V_{\gamma_i})\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\gamma_i}$, и значит, согласно теореме 8.6, $B=f(A)$ является компактным подмножеством в топологическом пространстве (Y,τ_2).

Этим теорема полностью доказана.

8.15. Следствие. *Пусть (X,τ_1) (Y,τ_2)- топологические пространства, и $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$- непрерывное сюръективное отображение. Если (X,τ_1) - компактное топологическое пространство, то (Y,τ_2) будет компактным топологическим пространством.*

8.16. Теорема. *Пусть X и Y- произвольные множества и $f:X\to Y$. Если τ - такая топология на множестве Y, что (Y,τ) является компактным пространством и τ_1- прообраз топологии τ относительно отображения f (см.5.20 и 5.21), то (X,τ_1) является компактным пространством.*

Доказательство. Если $\{U_\gamma\,|\gamma\in\Gamma\}$ - открытое покрытие пространства (X,τ_1), то для каждого $\gamma\in\Gamma$ существует такое $V_\gamma\in\tau$, что $U_\gamma=f^{-1}(V_\gamma)$. Тогда $Y=f(X)=f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma)=f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(V_\gamma))=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$, и значит, $\{V_\gamma\,|\gamma\in\Gamma\}$ является открытым покрытием пространства (Y,τ). Из компактности пространства (Y,τ) следует существование конечного подпокрытия $\{V_{\gamma_1},..,V_{\gamma_n}\}$. Тогда $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}\right)=$

$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(V_{\gamma_i})=\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\gamma_i}$, и значит, (X,τ_1) является компактным пространством.

Этим теорема полностью доказана.

8.17. Теорема. *Замкнутое подмножество A компактного пространства (X,τ) является компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $\Delta=\{V_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ - такая совокупность открытых множеств в топологическом пространстве (X,τ), что $A\subseteq$

$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$. Тогда совокупность $\{V_\gamma|\gamma \in \Gamma\} \cup \{X\backslash A\}$ является открытым покрытием пространства (X,τ). Из компактности пространства (X,τ) следует существование конечного подпокрытия Ω пространства (X,τ), и значит, $A \subseteq \bigcup\limits_{U\in\Omega} U$. Так как $A\cap(X\backslash A) = \emptyset$, то $A \subseteq \bigcup\limits_{U\in\Omega\backslash\{X\backslash A\}} U$ и $\Omega\backslash\{X\backslash A\} \subseteq \Delta$. Согласно теореме 8.6, A является компактным множеством в топологическом пространстве (X,τ).

Этим теорема полностью доказана.

8.18. Теорема. *Если топологическое пространство* (X,τ) *является Хаусдорфовым (т.е. удовлетворяет аксиоме* T_2 (см. 7.1)) *и* A *- компактное множество в пространстве* (X,τ), *то* A *является замкнутым множеством в пространстве* (X,τ).

Доказательство. Допустим противное, т.е. что A не является замкнутым множеством в пространстве (X,τ). Тогда, согласно теореме 3.15, $[A]_{(X,\tau)}\backslash A \neq \emptyset$. Если $a \in [A]_{(X,\tau)}\backslash A$, то согласно теореме 8.9, $\Phi_a = \{U\cap A\,|U$ - окрестность точки a в $(X,\tau)\}$ является фильтром на множестве A. Так как сам фильтр является базисом для себя, то из компактности пространства $(A,\tau|_A)$ (см. теорему 8.13) следует, что $\bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)} \neq \emptyset$. Если $b \in \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$, то $b\in A$, и значит, $b\neq a$.

Так как (X,τ) является Хаусдорфовым пространством, то точки a и b обладают таким окрестностями U и V, соответстенно, что $U\cap V = \emptyset$. Тогда b не является точкой прикосновения к множеству U, и значит, $b \notin [U]_{(X,\tau)} \supseteq [U\cap A]_{(X,\tau)} \supseteq [U\cap A]_{(X,\tau)} \bigcap A \supseteq [U\cap A]_{(A,\tau|_A)} \supseteq \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$.

Получили противоречие с выбором элемента $b \in \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$.

Этим доказательство теоремы завершено.

8.19. Теорема. *Всякое компактное Хаусдорфово пространство* (X,τ) *является нормальным пространством (см. 7.1).*

Доказательство. Докажем вначале, что (X,τ) является регулярным пространством.

Согласно утверждения 7.3.1, в пространстве (X,τ) выполняется аксиома T_1. Проверим, что в пространстве (X,τ) выполняется и аксиома T_3.

Пусть $a\in X$ и F - такое замкнутое множество в пространстве (X,τ), что $a \notin F$. Так как (X,τ) является Хаусдорфовым пространством, то для каждого элемента $b\in F$ существуют такие окрестности U_b и V_b элементов a и b, соответственно, что $U_b\cap V_b = \emptyset$. Так как всякая точка топологического пространства обладает базисом окрестностей, состоящим из открытых множеств (см. теорему 2.6), то можем считать, что U_b и V_b являются открытыми множествами.

Согласно теореме 8.17, F является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ). Так как $F = \bigcup\limits_{b \in F} \{b\} \subseteq \bigcup\limits_{b \in F} V_b$, то, по теореме 8.6, существует такое конечное число множеств $V_{b_1}, \cdots, V_{b_n}$, что $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Тогда (см. теорему 1.2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i} \in \tau$ и $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}$, причем $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{b_i} \cap V_{b_i}) = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i} \in \tau$, то из произвольности элемента a и множества F следует регулярность пространства (X, τ).

Докажем теперь, что пространство (X, τ) является нормальным пространством.

Пусть A и B - такие замкнутые множества в пространстве (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Согласно, доказанному выше, для каждого элемента $b \in B$ существуют такие открытые множества V_b и U_b, что $b \in V_b$, $A \subseteq U_b$ и $U_b \cap V_b = \emptyset$.

Согласно теореме 8.17, B является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ).Так как $B = \bigcup\limits_{b \in B} \{b\} \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} V_b$, то, согласно теореме 8.6, существует такое конечное число множеств $V_{b_1}, \cdots, V_{b_n}$, что $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Тогда (см. теорему 1.2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i} \in \tau$ и $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}$, причем $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{b_i} \cap V_{b_i}) = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i} \in \tau$, то из произвольности множеств A и B следует, что пространство (X, τ) является нормальным.

Этим теорема полностью доказана.

Из этой теоремы и утверждения 7.3.4 легко следует:

8.20. Следствие. *Всякое компактное Хаусдорфово пространство (X, τ) является вполне регулярным пространством (см. 7.1).*

9. СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА.

9.1. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *связным* , если в нем нет других открыто-замкнутых множеств кроме $\emptyset$ и X.

Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *связным множеством в топологическом пространстве* (X, τ), если топологическое пространство $(A, \tau|_A)$ является связным.

9.2. **Упражнения**. Выяснить связность следующих топологических пространств и множеств.

9.2.1. (X, τ) - антидискретное пространство.

9.2.2. Одноэлементное множество $A = \{a\}$ в произвольном топологическом пространстве (X, τ).

9.2.3. В дискретном пространстве множество A, содержащего больше одного элемента.

9.2.4. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.

9.2.5. Пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ действительных чисел с интервальной топологией.

9.3. Теорема. *Пусть* (X, τ) *- топологическое пространство. Тогда верны следующие утверждения:*

9.3.1. *Если* A *- связное множество в пространстве* (X, τ), *то для любого открыто-замкнутого множества* U *топологического пространства* (X, τ) *либо* $A \subseteq U$, *либо* $A \cap U = \emptyset$;

9.3.2. *Если* $\{A_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ *- такая совокупность связных множеств в* (X, τ), *что* $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$, *то* $B = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *является связным множеством в пространстве* (X, τ);

9.3.3. *Если* A *- связное множество в пространстве* (X, τ), *то* $D = [A]_{(X,\tau)}$ *является связным множеством в пространстве* (X, τ).

Доказательство.

9.3.1. Если U - открыто-замкнутое множество в пространстве (X, τ), то $A \cap U$ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$. Из связности множества A следует, что, либо $A \cap U = \emptyset$, либо $A \cap U = A$, и тогда $A \subseteq U$.

Этим утверждение 9.3.1 доказано.

9.3.2. Допустим противное, т.е. что $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = B$ не является связным множеством в пространстве (X, τ).

Так как $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$, то выберем некоторый элемент $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

По допущению множество B не является связным, и значит, существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(B, \tau|_B)$, что $U \neq B$ и $U \neq \emptyset$. Тогда $V = B\backslash U$ тоже будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(B, \tau|_B)$, причем $V \neq B$ и $V \neq \emptyset$. Так как $B = U \cup V$, то либо $a \in U$, либо $a \in V$.

Допустим, для определенности, что $a \in U$. Тогда $a \in U \cap A_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $C_\gamma = U \cap A_\gamma \neq \emptyset$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Так как U - открыто-замкнутое множество в пространстве $(B, \tau|_B)$, то C_γ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $\big(A_\gamma, (\tau|_B)|_{A_\gamma}\big)$ (см. теоремы 4.1 и 4.4). Поскольку

$\tau|_{A_\gamma} = \{A_\gamma \cap W | W \in \tau\} = \{A_\gamma \cap B \cap W | W \in \tau\} = (\tau|_B)|_{A_\gamma}$,

то C_γ является открыто-замкнутым множеством в пространстве $\big(A_\gamma, \tau|_{A_\gamma}\big)$.

Из того, что A_γ является связным множеством следует, что либо $C_\gamma = \emptyset$ (но выше было доказано, что это не так), либо $C_\gamma = A_\gamma$.

Тогда $A_\gamma \subseteq U$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $U \subseteq B = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq U$, т.е. $B = U$. Получили противоречие с тем, что $U \neq B$.

Этим утверждение 9.3.2 доказано.

9.3.3. Допустим противное, т.е. что $D = [A]_{(X,\tau)}$ не является связным множеством. Тогда существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(D, \tau|_D)$, что $U \neq D$ и $U \neq \emptyset$. Выберем некоторый элемент $b \in D\backslash U$. Так как $b \in D = [A]_{(X,\tau)}$, то b будет точкой прикосновения к множествуA в пространстве (X, τ). Причем $b \in D\backslash U = V \neq D$ и V является открыто-замкнутым множеством в $(D, \tau|_D)$

Из того, что $b \in D = [A]_{(X,\tau)}$ следует, что $b \in D \cap [A]_{(X,\tau)} = [A]_{(D,\tau|_D)}$ (см теорему 4.6).

Так как V является открыто-замкнутым множеством в пространстве $(D, \tau|_D)$, то V будет окрестностью точки b в пространстве $(D, \tau|_D)$, и значит, $\emptyset \neq V \cap A$.

Тогда $V \cap A$ будет непустым открыто-замкнутым множеством в связном пространстве $(A, \tau|_A)$, а потому, $V \cap A = A$, т.е. $A \subseteq V$. Так как $D = D \cap [A]_{(X,\tau)} = \quad [A]_{(D,\tau|_D)} \subseteq [V]_{(D,\tau|_D)} = V \subseteq D$, то $V = D$.

Получили противоречие с тем, что $V \neq D$. Следовательно, множество $[A]_{(X,\tau_1)}$ является связным множеством в пространстве (X, τ).

Этим теорема полностью доказана.

9.4. Теорема. *Пусть* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *- топологические пространства, и* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *- непрерывное отображение. Если* A *- связное множество в пространстве* (X, τ_1), *то* $C = f(A)$ *является связным множеством в пространстве* (Y, τ_2).

Доказательство. Допустим противное, т.е. что $C = f(A)$ не является связным множеством в пространстве (Y, τ_2). Тогда $(C, \tau|_C)$ не является связным пространством, и значит, существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(C, \tau|_C)$, что $U \neq C$ и $U \neq \emptyset$.

Так как $f|_A : (A, \tau|_A) \to (C, \tau|_C)$ является непрерывным отображением (см. теоремы 5.18 и 5.19), то, согласно теореме 5.13, $V = f^{-1}(U)$ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$. Так как $f|_A : A \to C = f(A)$ является сюрьективным отображением, то (см. 5.7.2) $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ и $f|_A(f|_A{}^{-1}(U)) = U \neq C = f(A)$, и значит, $f|_A{}^{-1}(U) \neq A$.

Итак, $V = f|_A{}^{-1}(U)$ является непустым открыто-замкнутым множеством отличным от A. Получили противоречие с тем, что A - связное множество.

Этим теорема полностью доказана.

9.5. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$. *Связной компонентой* C_a *точки* a в пространстве (X, τ) называется объединение всех связных множеств, содержащих точку a.

9.6. Теорема. (Свойства связных компонент точек). *Если* (X, τ) *- топологическое пространство и* $a, b \in X$ *- различные точки, то верны следующие утверждения:*

9.6.1 C_a *является связным замкнутым множеством, содержащим точку* a;

9.6.2. *Либо* $C_a \cap C_b = \emptyset$, *либо* $C_a = C_b$.

Доказательство.

9.6.1. Пусть $\Delta = \{A_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ - множество всех связных множеств в пространстве (X, τ), содержащих точку a. Так как $\{a\}$ является связным множеством в пространстве (X, τ), содержащим точку a, то $\Delta \neq \emptyset$, и значит $a \in C_a$.

Поскольку $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, то, согласно утверждению 9.3.2, $C_a = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ является связным множеством.

Согласно утверждению 9.3.3, $[C_a]_{(X,\tau)}$ будет связным множеством, причем $a \in [C_a]_{(X,\tau)}$, и значит, $[C_a]_{(X,\tau)} \in \Delta$. Тогда $C_a = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \supseteq [C_a]_{(X,\tau)} \supseteq C_a$, и значит $C_a = [C_a]_{(X,\tau)}$, т.е. C_a - замкнутое множество.

Этим утверждение 9.6.1 доказано.

9.6.2. Если $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, то согласно утверждению 9.3.2, $D = C_a \cup C_b$ является связным множеством в пространстве (X, τ). Так как $a \in C_a \subseteq D$ и $b \in C_b \subseteq D$, то из определения 9.5 следует, что $C_a \supseteq D$ и $C_b \supseteq D$. Тогда $C_a \subseteq D \subseteq C_a$ и $D \subseteq C_b \subseteq D$, и значит, $C_a = D$ и $C_b = D$, т.е. $C_a = C_b$.

Этим теорема полностью доказана.

9.7. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *вполне несвязным*, если $C_a = \{a\}$ для любой точки $a \in X$, т.е. если всякое непустое связное множество является одноэлементным.

9.8. Упражнение. Доказать, что всякое вполне несвязное пространство является T_1-пространством.

10. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

10.1. Определение. Пусть $\Delta = \{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ - непустая совокупность непустых множеств X_γ. Рассмотрим множество

$$\widehat{X} = \{f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma | f(\gamma) \in X_\gamma \text{ для } \gamma \in \Gamma\}.$$

Это множество $\widehat{X}$ назовем *произведением совокупности* Δ *множеств* и будем обозначать его через $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.

10.2. Замечание. Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то каждое отображение $f \in \widehat{X}$ можно отождествить с последовательностью $(f(1), \cdots, f(n))$. Тогда $\widehat{X} = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i$ для i = 1, $\cdots$, n$\}$.

В частности, если $n = 2$, то $\widehat{X} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$.

Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то вместо записи $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ будем иногда писать $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ или $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

10.3. Определение. Пусть $\Delta = \{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ **и** $\widehat{X} = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$, действующее по правилу $\pi_\gamma(f) = f(\gamma)$ для любого $f \in \widehat{X}$, называется *проекцией* множества $\widehat{X}$ на множество X_γ.

Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то для любого $1 \leq i \leq n$ имеем $\pi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$.

10.4. Определение. Пусть задана непустая совокупность $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ топологических пространств и $\widehat{X} = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ рассмотрим на множестве $\widehat{X}$ топологию $\widehat{\tau}_\gamma$, которая является прообразом топологии τ_γ относительно отображения $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$ (см. 5.21) и топологию $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$. (см. теорему 6.12).

Топологическое пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ называется *произведением совокупности* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *топологических пространств* и обозначается $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$.

10.5. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$*– непустая совокупность топологических пространств и* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности. Тогда для каждого* $\lambda \in \Gamma$ *проекция* $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ *является сюрьективным, непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Так как $X_\gamma \neq \emptyset$, для любого $\gamma \in \Gamma$, то в каждом X_γ можем зафиксировать некоторый элемент a_γ.

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma$ и b - произвольный элемент из X_λ. Тогда отображение $f : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу, $f(\gamma) = a_\gamma \in X_\gamma$ если $\gamma \neq \lambda$ и $f(\gamma) = b \in X_\lambda$ если $\gamma = \lambda$, принадлежит $\widehat{X}$, причем $\pi_\lambda(f) = b$. Из произвольности элемента b следует, что отображение $\pi_\lambda : \widehat{X} \to X_\lambda$ является сюръективным.

Проверим теперь непрерывность отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Если $\widehat{\tau}_\lambda$ - прообраз топологии τ_λ относительно отображения $\pi_\lambda : \widehat{X} \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$, то согласно теореме 5.22 отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}_\lambda) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным и открытым. Так как $\widehat{\tau} = \sup\{\tau_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $\widehat{\tau} \geq \tau_\lambda$, и значит, (см. определение 6.1 и теорему 5.13) отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным.

Проверим теперь открытость отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Пусть теперь $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ и $U = \pi_\lambda(\widehat{U})$. Если $a \in U = \pi_\lambda(\widehat{U})$, то существует такое $f_0 \in \widehat{U}$, что $a = f_0(\lambda)$. Так как $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, и $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$(см. определение 10.4), то, согласно теореме 6.13, существует такое конечное число элементов $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ и окрестности $\widehat{U}_1, \cdots, \widehat{U}_n$ элемента f_0 в пространствах $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_1}), \cdots, (\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_n})$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$.

Не нарушая общности, можем считать, что $\widehat{U}_i \in \widehat{\tau}_{\gamma_i}$(в противном случае в качестве $\widehat{U}_i$ взяли бы открытое подмножество, содержащее f_0 и содержащееся в $\widehat{U}_i$). Тогда $\widehat{U}_i = \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i)$ для некоторого $U_i \in \tau_{\gamma_i}$ причем $f_0(\gamma_i) \in U_i$ для $1 \leq i \leq n$.

Возьмем $U_\lambda = X_\lambda$ если $\lambda \notin \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ и $U_\lambda = U_s$ если $\lambda = \gamma_s$. Тогда $U_\lambda \in \tau_\lambda$ и $a = f_0(\lambda) \in U_\lambda$.

Проверим, что $U_\lambda \subseteq U$. Если b - произвольный элемент из U_λ, то рассмотрим отображение $f_b : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу, $f_b(\lambda) = b$ и $f_b(\gamma) = f_0(\gamma)$ если $\gamma \neq \lambda$.

Так как
$\pi_{\gamma_i}(f_b) = \quad f_b(\gamma_i) = f_0(\gamma_i) \in U_i$ для $1 \leq i \leq n$ и $\gamma_i \neq \lambda$;
и $f_b(\lambda) = b \in U_\lambda = U_s$ для $\lambda = \gamma_s$,
то $f_b \in \pi^{-1}_{\gamma_i}(U_i) = \widehat{U}_i$ для $1 \leq i \leq n$, и значит, $f_b \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$. Тогда $b = f_b(\lambda) = \quad \pi_\lambda(f_b) \in \pi_\lambda(\widehat{U}) = U$. Из произвольности элемента b следует, что $U_\lambda \subseteq U$. Значит, U является окрестностью точки a в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, т.е. U является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$

Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_\lambda$, т.е. $\pi_\lambda(\widehat{U}) = U \in \tau_\lambda$. Из произвольности множества $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ следует открытость отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Этим теорема полностью доказана.

10.6. Теорема. *Пусть $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$– непустая совокупность топологических пространств, $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ - произведение этой совокупности и $f_0 \in \widehat{X}$. Если $\lambda \in \Gamma$ и $\widehat{X}_\lambda = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \neq \lambda\}$, то отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Так как, согласно теореме 10.5, отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным, то, по теореме 5.19, отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ будет непрерывным.

Пусть теперь $V \in \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}$ и $V_\lambda = \pi_\lambda(V)$. Покажем, что $V_\lambda \in \tau_\lambda$, т.е. что V_λ является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Если $a \in V_\lambda = \pi_\lambda(V)$, то существует такое $f_0 \in V$, что $a = f_0(\lambda)$.

Так как $V = \widehat{X}_\lambda \cap \widehat{U}$, для некоторого $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, и $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$(см. определение 10.4), то, согласно теореме 6.13, существует такое конечное число элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ и окрестности $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_n$ элемента f_0 в пространствах $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_1}), \ldots, (\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_n})$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$.

Как и при доказательстве теоремы 10.5, не нарушая общности, можем считать, что $\widehat{U}_i \in \widehat{\tau}_{\gamma_i}$. Тогда $\widehat{U}_i = \pi^{-1}_{\gamma_i}(U_i)$, для некоторого $U_i \in \tau_{\gamma_i}$ и $f_0(\gamma_i) = \pi_{\gamma_i}(f_0) \in \quad \pi_{\gamma_i}(\pi^{-1}_{\gamma_i}(U_i) = U_i$ для $1 \leq i \leq n$.

Возьмем $U_\lambda = X_\lambda$ если $\lambda \notin \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ и $U_\lambda = U_k$ если $\lambda = \gamma_k$. Тогда $U_\lambda \in \tau_\lambda$ и $a = f_0(\lambda) \in U_\lambda$.

Проверим, что $U_\lambda \subseteq V$. Если b - произвольный элемент из U_λ, то рассмотрим отображение $f_b : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу $f_b(\lambda) = b$ и $f_b(\gamma) = f_0(\gamma)$, если $\gamma \neq \lambda$. Тогда $f_b \in \widehat{X}_\lambda$.

Так как $\pi_{\gamma_i}(f_b) = f_b(\gamma_i) = f_0(\gamma_i) \in U_i$ если $1 \leq i \leq n$ и $\gamma_i \neq \lambda$; и $f_b(\lambda) = b \in U_\lambda = U_s$ если $\lambda = \gamma_s$, то $f_b \in \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i) = \widehat{U}_i$ для $1 \leq i \leq n$, и значит, $f_b \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$. Тогда $f_b \in \widehat{U} \cap \widehat{X}_\lambda$, и значит, $b = f_b(\lambda) = \pi_\lambda(f_b) \in \pi_\lambda(\widehat{U} \cap \widehat{X}_\lambda) = \pi_\lambda(V) = V_\lambda$.

Из произвольности элемента b следует, что $U_\lambda \subseteq V_\lambda$, и значит, V_λ является окрестностью точки a в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, т.е. V_λ является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_\lambda$. Значит, отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является открытым.

Проверим теперь, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является биекцией.

Пусть $f_1, f_2 \in \widehat{X}_\lambda$ и $f_1 \neq f_2$. Так как $f_1(\gamma) = f_0(\gamma) = f_2(\gamma)$ для любого $\gamma \neq \lambda$ (см. выше, определение множества $\widehat{X}_\lambda$) , то $f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda)$. Тогда $\pi_\lambda(f_1) = f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda) = \pi_\lambda(f_2)$, т.е. отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является инъективным.

Из определения множества $\widehat{X}_\lambda$ легко следует так же, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является сюръективным, и значит, отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является биективным.

Итак, мы показали, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным, открытым и биективным, т.е. оно является гомеоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

10.7. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *- непустая совокупность топологических пространств,* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности и* $f \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *. Тогда верны следующие утверждения:*

10.7.1. *Если* S *- конечное подмножество множества* Γ *и для каждого* $\gamma \in S$ *в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *задана некоторая окрестность* U_γ *точки* $\pi_\gamma(f)$, *то* $\overline{W} = \bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ *является окрестностью точки*

f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$;

10.7.2. *Для любой окрестности $\widehat{U}$ точки f в пространстве $(\widehat{X},\ \widehat{\tau})$ существует такое конечное подмножество S множества Γ, что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) \subseteq \widehat{U}$.*

Доказательство.

10.7.1. Согласно определению 2.1, для каждого $\gamma \in S$ существует такое $V_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in V_\gamma \subseteq U_\gamma$. Тогда $f \in \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ и $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ является открытым множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$ (см. определение 10.4) для каждого $\gamma \in S$. Следовательно, $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$ для каждого $\gamma \in S$.

Так как $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, и значит (см. утверждение 2.3.3), $\widehat{W} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Этим утверждение 10.7.1 полностью доказано.

10.7.2. Пусть теперь $\widehat{U}$ - произвольная окрестность точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Так как (см. определение 10.4) $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то согласно теореме 6.14, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$, и для каждого $\gamma \in S$ существует такая окрестность $\widehat{W}_\gamma$ элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$, что $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} \widehat{W}_\gamma$.

Согласно определению 2.1, для каждого $\gamma \in S$ существует такое $\widehat{U}_\gamma \in \widehat{\tau}_\gamma$, что $f \in \widehat{U}_\gamma \subseteq \widehat{W}_\gamma$. Для каждого $\gamma \in S$ существует такое открытое множество $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\widehat{U}_\gamma = \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, и значит, $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$. Тогда $\bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma \in S} \widehat{U}_\gamma \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in S} \widehat{W}_\gamma = \widehat{U}$.

Этим теорема полностью доказана.

10.8. Теорема. *Пусть $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ - непустая совокупность топологических пространств.* Если $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности и $f \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$, то точка f обладает базисом B_f окрестностей в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, состоящим из всех подмножеств $\widehat{U}$ множества $\widehat{X}$, каждое из которых может быть получено следующим образом:*

Берем конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$, *и для каждого* $\gamma \in S$ *выбираем такое* $U_\gamma \in \tau_\gamma$, *что* $\pi_\gamma(f) = f(\gamma) \in U_\gamma$. *Возьмем* $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$, т.е. $\widehat{U} = \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ *для любого* $\gamma \in S\}$.

Доказательство. Так как для каждого $\gamma \in S$ множество U_γ является окрестностью элемента $\pi_\gamma(f) = f(\gamma)$ в пространстве (X_γ, τ_γ), то согласно утверждению 10.7.1, $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, т.е. совокупность B_f удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Так как, согласно утверждению 10.7.2, для любой окрестности $\widehat{U}$ точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ существует такое конечное подмножество S множества Γ, и для каждого $\gamma \in S$ существует такое открытое множество $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) \subseteq \widehat{U}$, то совокупность B_f удовлетворяет и второму условию определения 2.4.

Этим теорема полностью доказана.

10.9. Теорема. *Пусть:* $\Delta = \{(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n)\}$ *- конечная непустая совокупность топологических пространств.* Если $(\widehat{X}\widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$ *- произведение этой совокупности и* $f \in \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$, *то точка* $(x_1, \cdots, x_n) \in \widehat{X}$ *обладает таким базисом* B *окрестностей в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, *состоящим из всех подмножеств* $\widehat{U}$ *множества* $\widehat{X}$, *которые могут быть получены следующим образом:*

Для каждого $1 \leq i \leq n$ *выбираем такое* $U_i \in \tau_i$, что $x_i \in U_i$ *и полагаем* $\widehat{U} = \{(z_1, \cdots z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ *для* $1 \leq i \leq n\}$.

Доказательство. Согласно теореме 10.8, множество $\widehat{U} = \{(z_1, \cdots z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ для $1 \leq i \leq n\}$ является окрестностью элемента $(x_1, \cdots, x_n)$ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$, т.е. B удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Кроме того, если $\widehat{V}$ - окрестность элемента $(x_1, \cdots, x_n)$ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$, то согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \{1, \cdots, n\}$ и для каждого $k \in S$ выбрано такое $U_k \in \tau_k$, что $\pi_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k \in U_k$ и $\widehat{V} \supseteq \widehat{U} = \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma \gamma \in S\} =$

$\bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$. Тогда, если для каждого $i \in \{1, \cdots, n\}\backslash S$ возьмем $U_i = X_i$, то получим $\bigcap\limits_{\gamma\in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i) = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ для $1 \leq i \leq n\}$, и значит, $\widehat{V} \supseteq \{(z_1, \cdots, z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i 1 \leq i \leq n\} = \widehat{U}$, т.е. B удовлетворяет и второму условию определения 2.4.

Этим теорема полностью доказана.

10.10. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *- непустая совокупность топологических пространств и* $\emptyset \neq S \subset \Gamma$. *Тогда топологические пространства* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *и* $(\prod\limits_{\gamma\in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$ *являются гомеоморфными.*

Доказательство. Определим отображение $\widehat{\psi} : \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to (\prod\limits_{\gamma\in S} X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\backslash S} X_\gamma)$ следующим образом:

Если $f \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, то рассмотрим $f' = f|_S$ и $f'' = f|_{\Gamma\backslash S}$. Тогда $f' \in (\widehat{X'}, \widehat{\tau}') = \prod\limits_{\gamma\in S} X_\gamma$ и $f'' \in (\widehat{X''}, \widehat{\tau''}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\backslash S} X_\gamma$. Положим $\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$. Легко заметить, что $\widehat{\psi} : \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to (\prod\limits_{\gamma\in S} X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\backslash S} X_\gamma)$ является биективным отображением.

Покажем, что отображение $\widehat{\psi} : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma) \to (\widehat{X'}, \widehat{\tau'}) \times (\widehat{X''}, \widehat{\tau''}) = (\prod\limits_{\gamma\in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$ является непрерывным и открытым отображением.

Пусть $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ и $W = \widehat{\psi}(\widehat{U})$. Если $(f', f'') \in W$ и f - такой элемент из $\widehat{X}$, что $f(\gamma) = f'(\gamma)$ для $\gamma \in S$ и $f(\gamma) = f''(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\backslash S$, то $f \in \widehat{\psi}^{-1}(W) = \widehat{U}$. Так как $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, то $\widehat{U}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ и для каждого $\gamma \in \Delta$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\widehat{U} \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$. Тогда, согласно теореме 10.8, $\widehat{U'} = \{\varphi' \in \widehat{X'} | \varphi'(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta \cap S\}$ является окрестностью элемента f' в пространстве $(\widehat{X'}, \widehat{\tau'})$ и $\widehat{U''} = \{\varphi'' \in \widehat{X''} | \varphi''(\gamma) \in U_\lambda$ для $\gamma \in \Delta \cap (\Gamma\backslash S\}$

является окрестностью элемента f'' в пространстве $(\widehat{X}'', \widehat{\tau}'')$, причем $\widehat{\psi}(\widehat{U} \supseteq \{(\varphi', \varphi'')|\varphi' \in \widehat{U}', \varphi" \in \widehat{U}''\}$. Так как, согласно теореме 10.9, $\widehat{U}' \times \widehat{U}'' = \{(\varphi', \varphi")|\varphi' \in \overline{U'}, \varphi" \in \overline{U''}\}$ является окрестностью элемента $\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$, то $W = \widehat{\psi}(\widehat{U})$ является окрестностью элемента $\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$. Из произвольности элемента $(f', f'') \in W$ следует, что W является открытым множеством в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$.

Этим мы доказали, что $\widehat{\psi}$ является открытым отображением.

Пусть теперь $\widehat{V}$ - произвольное открытое множество в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$ и $\widehat{V} = \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V})$. Если f - произвольный элемент из $\widehat{V}$, то существует такой элемент $(f', f'') \in \widetilde{V}$, что $\widehat{\psi}(f) = (f', f")$. Так как $\widehat{V}$ - открытое множество в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$, то $\widehat{V}$ является окрестностью элемента $(f', f")$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$. Согласно теореме 10.9, существуют такие окрестности $\widehat{V}'$ и $\widehat{V}''$ элементов f' и $f"$ в пространствах $\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ и $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ соответственно, что $\widehat{V}' \times \widehat{V}'' \subseteq \widehat{V}$.

Согласно теореме 10.8, существуют такие конечные подмножества $\Delta' \subseteq S$ и $\Delta'' \subseteq \Gamma \backslash S$, что для каждого $\gamma \in \Delta' \cup \Delta''$ существует такое открытое множество U_γ, в пространстве (X_γ, τ_γ), что $\widehat{V}' \supseteq \{\varphi \in \widehat{X}|\varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta'\}$ и $\widehat{V}'' \supseteq \{\varphi \in \widehat{X}|\varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta"\}$. Если $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, то по теореме 10.8, множество $\{\varphi \in \widehat{X}|\varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $\widehat{V} = \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}) \supseteq \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}' \times \widetilde{V}'') = \{\varphi \in \widehat{X}|\varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$, и значит, $\widehat{V}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Из произвольности элемента f следует, что $\widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}) = \widehat{V} \in \widehat{\tau}$, и согласно теореме 5.13, отображение $\widehat{\psi}$ является непрерывным.

Итак, мы доказали, что отображение $\widehat{\psi} : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to \ (\prod\limits_{\gamma \in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \setminus S}(X_\gamma, \tau_\gamma))$ является биективным, непрерывным и открытым отображением, т.е. является гомеоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

10.11. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *- непустая совокупность топологических пространств,* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности. Если* $f_0 \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ *и* $\widetilde{X}_0 = \{f \in \widehat{X} | \{\gamma \in \Gamma | f(\gamma) \neq f_0(\gamma)\}$ *является конечным множеством* $\}$, *то* $\widetilde{X}_0$ *является всюду плотным множеством в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ (см. определение 3.10) .

Доказательство . Пусть φ - любой элемент из $\widehat{X}$ и $\widehat{W}$ - произвольная окрестность элемента φ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$ и для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(\varphi) = \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ и $\widehat{W} \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in S\}$. Рассмотрим такой элемент $f_1 \in \widehat{X}$, что $f_1(\gamma) = \varphi(\gamma)$ для любого $\gamma \in S$ и $f_1(\gamma) = f_0(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma \setminus S$. Тогда $f_1 \in \widetilde{X}_0$ и $f_1 \in \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in S\} \subseteq \widehat{W}$, т.е. $\widetilde{X_0} \cap \widehat{W} \neq \emptyset$.

Из произвольности элемента φ и его окрестности $\widehat{W}$ следует, что множество $\widetilde{X_0}$ является всюду плотным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

10.12. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *- непустая совокупность топологических пространств, и* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности. Пространство* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *является связным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ, τ_γ) *является связным.*

Доказательство.

Необходимость. Так как, согласно теореме 10.5, для каждого $\gamma \in \Gamma$ проекция $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является непрерывным отображением, то согласно теореме 9.4 из связности пространства $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ и сюръективности отображения $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$ следует связность пространства (X_γ, τ_γ).

Достаточность. Пусть для каждого $\gamma \in \Gamma$ пространство (X_γ, τ_γ) является связным. Доказательство проведем в три этапа, а именно:

1. Γ является двухэлементным множеством;

2. Γ является конечным множеством;

3. Γ является произвольным бесконечным множеством.

Доказательство указанных этапов.

1. Пусть Γ является двухэлементным множеством, т.е. $\Gamma = \{1, 2\}$. Тогда $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2)$.

Зафиксируем некоторый элемент $(x_0, y_0) \in \widehat{X} = X_1 \times X_2$ и пусть, C_0 - связная компонента этой точки (x_0, y_0) в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Если $\widehat{X}_1 = \{(x, y_0) | x \in X_1\}$, то согласно теореме 10.6, пространства $(\widehat{X}_1, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_1})$ и (X_1, τ_1) являются гомеоморфными, и значит $\widehat{X}_1 = \{(x, y_0)|x \in X_1\}$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Поскольку $(x_0, y_0) \in \widehat{X}_1$, то $\widehat{X}_1 \subseteq C_0$.

Для любого $x \in X_1$ рассмотрим подмножество $\widehat{Y}_x = \{(x, y)|y \in X_2\}$ множества $\widehat{X}$. По теореме 10.6, пространство $(\widehat{Y}_x, \widehat{\tau}|_{\widehat{Y}_x})$ гомеоморфно пространству (X_2, τ_2), и значит, множество $Y_x = \{(x, y)|y \in X_2\}$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Так как $(x, y_0) \in \widehat{X}_1 \subseteq C_0$ и $(x, y_0) \in Y_x$, то согласно утверждению 9.3.2, $C_0 \cup Y_x$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, и значит, $C_0 \supseteq Y_x$ для любого $x \in X_1$. Тогда $\widehat{X} = \{(x, y)|x \in X_1, y \in X_2\} = \bigcup\limits_{x \in X_1} Y_x \subseteq C_0 \subseteq \widehat{X}$, т.е. $\widehat{X} = C_0$.

Следовательно, пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ является связным.

2. Пусть теперь Γ является конечным множеством, т.е. $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$. Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу n.

Если $n = 1$, то $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (X_1, \tau_1)$, и значит, является связным пространством.

Допустим, что теорема верна для числа n, и $\Gamma = \{1, \cdots, n+1\}$. Тогда, согласно допущению, пространства $\prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$ и (X_{n+1}, τ_{n+1}) являются связными, и согласно ранее доказанному (см. этап 1 доказательства настоящей теоремы), пространство $(\prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)) \times (X_{n+1}, \tau_{n+1})$ тоже будет связным.

Так как по теореме 10.10 пространства $(\prod\limits_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)) \times (X_{n+1},\tau_{n+1})$ и $\prod\limits_{i=1}^{n+1}(X_i,\tau_i)$ являются гомеоморфными, то и пространство $\prod\limits_{i=1}^{n+1}(X_i,\tau_i)$ является связным.

Этим теорема доказана для любого конечного множества Γ.

3. Пусть теперь Γ является произвольным бесконечным множеством.

Зафиксируем некоторый элемент $f_0 \in (\widehat{X},\widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma,\tau_\gamma)$. Если $\widehat{\Gamma}$ - множество всех конечных подмножеств множества Γ, то согласно теореме 10.10, для каждого $S \in \widehat{\Gamma}$ пространства $(\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma,\tau_\gamma))\times \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S}(X_\gamma,\tau_\gamma)$ и $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma,\tau_\gamma)$ являются гомеоморфными, и значит, можем считать, что $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma,\tau_\gamma) = (\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma,\tau_\gamma)) \times \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S}(X_\gamma,\tau_\gamma)$.

Если $\widehat{X}_S = \{f \in \widehat{X}|f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}= \{\varphi \in (\prod\limits_{\gamma\in S}X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S}X_\gamma)\ |\varphi(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}$, то из теоремы 10.6 следует, что пространства $\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma,\tau_\gamma)$ и $(\widehat{X}_S,\widehat{\tau}|_{\widehat{X}_S})$ являются гомеоморфными. Тогда, согласно раннее доказанному (см. этап 2 доказательства настоящей теоремы), пространство $\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma,\tau_\gamma)$ будет связным, и значит, согласно теореме 10.6, пространство $(\widehat{X}_S,\widehat{\tau}|_{\widehat{X}_S})$ будет связным.

Итак, мы доказали, что для любого конечного подмножества S множества Γ множество $\widehat{X}_S = \{f \in \widehat{X}|f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}$ является связным в пространстве $(\widehat{X},\widehat{\tau})$.

Так как $f_0 \in \widehat{X}_S$ для любого $S \in \widehat{\Gamma}$, то, согласно утверждению 9.3.2, $\widehat{X}' = \{f \in \widehat{X}|\{\gamma \in \Gamma|f(\gamma) \neq f_0(\gamma)$ является конечным$\}\} = \bigcup\limits_{S\in\widehat{\Gamma}}\widehat{X}_S$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X},\widehat{\tau})$.

Кроме того, согласно теореме 10.11, множество $\widehat{X}'$ является всюду-плотным в пространстве $(\widehat{X},\widehat{\tau})$, то согласно утверждения 9.3.3, $\widehat{X} = [X']_{(\widehat{X},\widehat{\tau})}$ является связным множеством, т.е. $(\widehat{X},\widehat{\tau})$ является связным пространством.

Этим теорема полностью доказана.

10.13. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma,\tau_\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ *- непустая* *совокупность топологических пространств, и* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности. Тогда верны следующие утверждения:*

10.13.1. *Для любого целого числа* $0 \le i \le 3$ *в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *выполняется аксиома отделимости* T_i *тогда и только тогда, когда в каждом из пространств* (X_γ, τ_γ) *выполняется эта же аксиома отделимости* T_i.

10.13.2. *Пространство* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *является вполне регулярным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ, τ_γ) *является вполне регулярным.*

Доказательство.

10.13.1. Необходимость. Пусть $0 \le i \le 3$ и в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ выполняется аксиома отделимости T_i.

Зафиксируем некоторый элемент f_0 из $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Если $\lambda \in \Gamma$ и $\widehat{X}_\lambda = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \ne \lambda\}$, то согласно теореме 10.6, топологические пространства $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ и $(\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda})$ являются гомеоморфными. Так как, согласно упражнению 7.7.2, в пространстве $(\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda})$ выполняется аксиома отделимости T_i, то и в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ выполняется аксиома отделимости T_i для люого $0 \le i \le 3$.

Этим необходимость для утверждения 10.13.1 доказана.

10.13.1. Достаточность. Пусть теперь $0 \le i \le 3$ и в каждом из пространств (X_γ, τ_γ) выполняется аксиома отделимости T_i.

Если $f_1 \ne f_2 \in (\widehat{X}, \widehat{\tau})$, то $f_1(\lambda) \ne f_2(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \Gamma$.

Если $i = 0$, то в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ хотя бы ода из точек $f_1(\lambda)$ или $f_2(\lambda)$ имеет окрестность не содержащую другую. Допустим, для определенности, что $\pi_\lambda(f_1) = f_1(\lambda)$ обладает такой окрестностью U, что $\pi_\lambda(f_2) = f_2(\lambda) \notin U$. Так как $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным отображением (см. теорему 10.5), то $\widehat{U} = \pi_\lambda^{-1}(U)$ будет окрестностью точки f_1 в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $f_2 \notin \widehat{U}$, ибо $\pi_\lambda(f_2) = f_2(\lambda) \notin U = \pi_\lambda(\widehat{U})$.

Этим достаточность для утверждения 10.13.1 в случае, когда $i = 0$ доказана.

Если $i = 1$, то достаточность для утверждения 10.13.1 доказывается аналогично как и для случая $i = 0$ с той лишь разницей, что нужно рассматривать и такую окрестность V точки $f_2(\lambda)$, что $f_1(\lambda) \notin V$.

Если $i = 2$, то в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ существуют такие окрестности U и V точек $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, соответственно, что $U \cap V = \emptyset$. Тогда $\widehat{U} = \pi_\lambda^{-1}(U)$ и $\widehat{V} = \pi_\lambda^{-1}(V)$ будут окрестностями точек f_1 и f_2, соответственно, в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$, ибо $\pi_\lambda(\widehat{U} \cap \widehat{V}) = \pi_\lambda(\widehat{U}) \cap \pi_\lambda(\widehat{V}) = U \cap V = \emptyset$.

Этим достаточность для утверждения 10.13.1 в случае, когда $i = 2$ доказана.

Если $i = 3$, то согласно утверждению 7.2.3, достаточно доказать, что в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ каждая точка f обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых множеств.

Итак, пусть W - произвольная окрестность точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Согласно утверждению 10.7.2, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$, что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq W$.

Так как для любого $\gamma \in S$ пространство (X_γ, τ_γ) является T_3 - пространством, то согласно утверждению 7.2.3, существует такая замкнутая окрестность V_γ точки $\pi_\gamma(f)$ в пространстве (X_γ, τ_γ), что $V_\gamma \subseteq U_\gamma$.

Из непрерывности отображения $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ (см. теоремы 10.5, 5.12 и 5.13) следует, что $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ будет замкнутой окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ для любого $\gamma \in S$. Тогда $\widehat{V} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq W$ и $\widehat{V}$ будет замкнутой окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Итак, мы доказали, что в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ любая окрестность W точки f содержит некоторую замкнутую окрестность точки f, и значит, f обладает базисом из замкнутых окрестностей, т.е. пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ является T_3 пространством.

Этим утверждение 10.13.1 полностью доказано.

10.13.2. Необходимость. Необходимость доказывается дословным повторением доказательства необходимости в утверждении 10.13.1.

10.13.2. Достаточность. Пусть каждое из пространств (X_γ, τ_γ) является вполне регулярным. Тогда из 10.13.1 следует, что в пространстве

$(\widehat{X},\widehat{\tau})$ выполняется аксиома отделимости T_1.

Пусть теперь $\widehat{F}$ - произвольное замкнутое множество в пространстве $(\widehat{X},\widehat{\tau})$ и f_0 - такой элемент из $\widehat{X}$, что $f_0 \notin \widehat{F}$. Тогда $\widehat{X}\backslash\widehat{F} \in \widehat{\tau}$, и значит, $\widehat{X}\backslash\widehat{F}$ является окрестностью элемента f_0 в пространстве $(\widehat{X},\widehat{\tau})$. Согласно утверждению 10.7.2, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$ что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $V_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f_0) \in V_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma\in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \widehat{X}\backslash\widehat{F}$.

Если $\gamma \in S$ и $F_\gamma = X_\gamma\backslash V_\gamma$, то $\pi_\gamma(f_0) \notin F_\gamma$, и из вполне регулярности пространства (X_γ,τ_γ) следует, что существует такое непрерывное отображение $\psi_\gamma : (X_\gamma,\tau_\gamma) \to (R,\tau)$, что $0 \le \psi_\gamma(\pi_\gamma(f)) \le 1$, $\psi_\gamma(\pi_\gamma(f_0)) = 0$ и $\psi_\gamma(\pi_\gamma(F_\gamma)) \subseteq \{1\}$.

Для каждого $\gamma \in S$ рассмотрим отображение $\widehat{\psi}_\gamma : (\widehat{X},\widehat{\tau}) \to (R,\tau)$, действующее по правилу $\widehat{\psi}_\gamma(f) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f))$ для любого $f \in \widehat{X}$. Тогда, согласно упражнению 5.23.3, отображение $\widehat{\psi}_\gamma : (\widehat{X},\widehat{\tau}) \to (\mathbb{R},\tau_{инт})$ будет непрерывным, причем $0 \le \widehat{\psi}_\gamma(f) \le 1$ для любого $f \in \widehat{X}$. Кроме того, $\widehat{\psi}_\gamma(f_0) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f_0)) = 0$ и $\widehat{\psi}_\gamma(f) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f)) \subseteq \{1\}$ для любого $f \in \pi_\gamma^{-1}(F_\gamma) = \quad \widehat{X}\backslash\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$.

Если $\widehat{\psi}(f) = \max\{\widehat{\psi}_\gamma(f)|\gamma \in S\}$ для любого $f \in \widehat{X}$, то $0 \le \widehat{\psi}(f) \le 1$ для каждого $f \in \widehat{X}$ и, согласно упражнению 5.23.5, отображение $\widehat{\psi} : (\widehat{X},\widehat{\tau}) \to (\mathbb{R},\tau_{инт})$ будет непрерывным, причем $\widehat{\psi}(f_0) = \max\{\psi_\gamma(f_0) = 0|\gamma \in S\} = 0$.

Если теперь $f \in \widehat{F}$, то $f \notin \widehat{X}\backslash\widehat{F} \supseteq \bigcap\limits_{\gamma\in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$, и значит, $f \notin \pi_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0})$, т.е. $\pi_{\gamma_0}(f) \in F_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in S$. Тогда $\psi_{\gamma_0}(\pi_{\gamma_0}(f)) = 1$. Так как $\widehat{\psi}(f) \le 1$, то $\widehat{\psi}(f) = 1$, и значит $\widehat{\psi}(F) = \{1\}$.

Из произвольности элемента f_0, множества F следует вполнерегулярность пространства $(\widehat{X},\widehat{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

10.14. Теорема. (**Тихонова**) *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma,\tau_\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ *- непустая совокупность топологических пространств, и* $(\widehat{X},\widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma,\tau_\gamma)$ *- произведение этой совокупности. Пространство* $(\widehat{X},\widehat{\tau})$ *является компактным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ,τ_γ) *является компактным.*

Доказательство.

Необходимость. Если пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является компактным, то согласно теореме 10.5, для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является непрерывным сюръективным отображением. Тогда, согласно следствию 8.15, пространство (X_γ, τ_γ) является компактным.

Этим необходимость доказана.

Доказательство достаточности является довольно сложным, и мы его не приводим.

10.15. Теорема. *Пусть $X = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i$ - вещественные числа $\}$- n-мерное Евклидово пространство. Если $\rho((x_1, \cdots, x_n),_(y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ - обычная метрика на пространстве X. и τ_ρ - топология, задаваемая метрикой ρ (см. теорему 1.5), то топологическое пространство (X, τ_ρ) гомеоморфно прямому произведению n экземпляров топологических пространств $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ вещественных чисел с интервальной топологией $\tau_{инт}$.*

Доказательство. Пусть $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (R_1, \tau_1) \times \cdots \times (R_n, \tau_n)$, где каждое (R_i, τ_i) является пространством действительных чисел с интервальной топологией. Так как любой элемент $\widehat{x} \in \widehat{X}$ можно записать в виде $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. замечание 10.2), то будем считать, что $\widehat{X} = X$.

Проверим, что $\tau_\rho = \widehat{\tau}$.

Пусть $U \in \tau_\rho$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Тогда (см. теорему 1.5) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\{x \in X | \rho(a, x) < \varepsilon\} \subseteq U$. Так как для любого $1 \leq i \leq n$ интервал $V_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{n}, a_i + \frac{\varepsilon}{n}) \in \tau_i$, то согласно теореме 10 .9, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i)$ является окрестностью элемента a в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $-\frac{\varepsilon}{n} < a_i - y_i < \frac{\varepsilon}{n}$ для любого элемента $y = (y_1, \ldots, y_n) \in W$ и произвольного $1 \leq i \leq n$. Тогда $\rho(a, y) = \sqrt{(a_1 - y_1)^2 + \cdots + (a_n - y_n)^2} < \sqrt{n(\frac{\varepsilon}{n})^2} < \varepsilon$, и значит, $y \in U$.

Из произвольности элемента y следует, что $W \subseteq U$. Тогда (см. утверждению 2.3.2) U является окрестностью элемента a в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, и ввиду произвольности элемента a, из утверждения 2.3.4 следует, что $W \in \widehat{\tau}$.

Этим мы доказали, что $\tau_\rho \leq \widehat{\tau}$.

Пусть теперь $V \in \widehat{\tau}$ и $b = (b_1, \ldots, b_n) \in V$. Так как $V \in \widehat{\tau}$, то согласно утверждению 2.3.4, V является окрестностью элемента

b в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Согласно теореме 10.9, для каждого $1 \leq i \leq n$ существует такое $V_i \in \tau_i$, что $b_i \in V_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i) \subseteq V$. Так как каждое V_i является объединением интервалов, то (не нарушая общности) можем считать, что $V_i = (b_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$.

Если $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ такой элемент, что $\rho(b, y) < \varepsilon$, то $y_i \in V_i = (b_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$, и значит, $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i) \subseteq V$. Из произвольности элемента y следует, что $\{z \in X | \rho(z, b) < \varepsilon\} \subseteq V$.

Из произвольности элемента b (см. теорему 1.5) следует, что $V \in \tau_\rho$. Этим мы доказали, что $\tau_\rho \geq \widehat{\tau}$, и значит $\tau_\rho = \widehat{\tau}$.

Этим теорема полностью доказана.

10.16. Определение. Пусть X - произвольное множество и n - некоторое натуральное число. Если $\widehat{X} = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X$ для $i = 1, \ldots, n\}$ - произведение n экземпляров множества X, то всякое отображение $\psi : \widehat{X} \to Y$ будем называть *отображением от n аргументов множества X в множество Y.*

10.17. Определение. Пусть (X, τ) и (Y, τ') - топологические пространства, и n - некоторое натуральное число. Если $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ - произведение n экземпляров топологического пространства (X, τ), то непрерывное отображение $\psi : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (Y, \tau')$ будем называть *непрерывным отображением от n аргументов топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство (Y, τ').*

10.18. Замечание. Из теоремы 10.9 легко следует следующее утверждение:

Пусть (X, τ) и *(Y, τ') - топологические пространства, и n - некоторое натуральное число. Если $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ - произведение n экземпляров топологического пространства (X, τ), то отображение ψ* от *n аргументов топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство (Y, τ') будет непрерывным тогда и только тогда, когда для любых n элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ и произвольной окрестности U элемента $y = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ в пространстве (Y, τ') существуют такие окрестности V_i элементов x_i для $1 \leq i \leq n$ в пространстве (X, τ), что $\psi(V_1, \ldots, V_n) = \{\psi(z_1, \ldots, z_n) | z_i \in V_i, i = 1, \ldots, n\} \subseteq U$.*

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1.3.1. Действительно:

Так как X, $\emptyset \in \tau$, то аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Пусть A, $B \in \tau$. Тогда, либо $A = B = X$ и в этом случае $A \bigcap B = X \in \tau$, либо $A = \emptyset$, или $B = \emptyset$, и в этом случае $A \bigcap B = \emptyset \in \tau$, следовательно и аксиома 2 определения 1.1 выполняется.

Пусть $S \subseteq \tau$. Тогда $S \subseteq \{\{\emptyset\}, \{X\}, \}$. Если $X \in S$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = X \in \tau$ и если $X \notin S$, то $A = \emptyset$ для любого $A \in S$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A = \emptyset \in \tau$.

Это топологическое пространство (X, τ) называется *антидискретным пространством*, а топология $\tau = \{\emptyset, X\}$ называется *антидискретной топологией.*

1.3.2. Действительно.

Так как X и $\emptyset$ являются подмножествами множества X, то $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$, т.е. аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Если A, $B \in \tau$, то $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Тогда $A \cap B \subseteq X$, и значит $A \cap B \in \tau$, т.е. аксиома 2 определения 1.1 выполняется.

Если $S \subseteq \tau$, то $A \subseteq X$ для любого $A \in S$. Тогда $\bigcup\limits_{A \in S} A \subseteq X$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$, т.е. аксиома 3 определения 1.1 выполняется..

Это топологическое пространство (X, τ) называется *дискретным пространством*, а топология $\tau = \{A | A \subseteq X\}$ называется *дискретной топологией.*

1.3.3. В самом деле:

Так как $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, то τ_1 - антидискретная топология;

Так как $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, то τ_2 состоит из всевозможных подмножеств множества X, т.е.τ_2. - дискретная топология.

Если $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, то, очевидно, что аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь A, $B \in \tau_3$. Тогда:

Если $\emptyset \in \{A, B\}$, то $A \cap B = \emptyset \in \tau_3$;

Если $\emptyset \notin \{A, B\}$ и $\{a\} \in \{A, B\}$, то $A \cap B = \{a\} \in \tau_3$;

Если $\emptyset \notin \{A, B\}$ и $\{a\} \notin \{A, B\}$, то $A \cap B = \{a, b\} \in \tau_3$.

Случай $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$ доказывается аналогично предыдущему случаю.

1.3.4. Так как $\emptyset \notin \sigma_1$ и $X \notin \sigma_2$, то для совокупностей σ_1 и σ_2 не выполняется первая аксиома определения 1.1, и значит, σ_1 и σ_2 не являются топологиями на множестве X.

1.3.5. В самом деле:

τ_1 - дискретная топология;

τ_2 - антидискретная топология;

Для каждой из совокупностей $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{a\}, \{c\}\}$ и $\tau_5 = \{\emptyset, X, \{c,b\}, \{c\}, \{b\}\}$ как и при доказательстве упражнения 1.3.3, рассмотрением различных случаев, проверяется выполнимость всех аксиом определения 1.1.

1.3.6. Так как $\{a\} \bigcup \{b\} = \{a,b\} \notin \sigma_1$, а $\{a\}, \{b\} \in \sigma_1$, то σ_1 не удовлетворяет третьей аксиоме определения 1.1, и значит, σ_1 не является топологией на множестве X.

Аналогично, так как $\{a,b\} \bigcap \{a,c\}$ =$\{a\} \notin \sigma_2$, а $\{a.b\}, \{a,c\} \in \sigma_2$, то σ_2 не удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1, и значит, σ_2 не является топологией на множестве X

1.3.7. Так как $X \subseteq X$ и $X \backslash X = \emptyset$ является конечным множеством, то $X \in \tau$ и поскольку $\emptyset \in \tau$ (по определению совокупности τ), то первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь A, $B \in \tau$. Если $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$, то $A \bigcap B = \emptyset \in \tau$.

Если же $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то $X \backslash A$ и $X \backslash B$ являются конечными множествами. Тогда $X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$ является конечным множеством, и значит, $A \cap B \in \tau$, т.е. вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $S \subseteq \tau$.

Если $A = \emptyset$ для любого $A \in S$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = \emptyset \in \tau$.

Если же некоторое множество $A_0 \in S$ отлично от $\emptyset$, то $X \backslash A_0$ является конечным множеством. Тогда $X \backslash (\bigcup\limits_{A \in S} A) \subseteq X \backslash A_0$, и значит, $X \backslash (\bigcup\limits_{A \in S} A)$ является конечным множеством, т.е. $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$.

Итак, мы проверили выполнение и третьей аксиомы определения 1.1, т.е. (X, τ) - топологическое пространство.

1.3.8. Так как $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ и $\emptyset = (k, k)$, то $\mathbb{R} \in \tau_{инт}$ и $\emptyset \in \tau_{инт}$, т.е. первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Если A, $B \in \tau_{инт}$, то $A = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha)$ и $B = \bigcup\limits_{\gamma \in \Psi} (c_\gamma, d_\gamma)$. Тогда

$$A \cap B = \left(\bigcup_{\alpha\in\Omega} (a_\alpha, b_\alpha) \right) \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Psi} (c_\gamma, d_\gamma) \right) = \bigcup_{\alpha\in\Omega,\, \gamma\in\Psi} ((a_\alpha, b_\alpha) \cap (c_\gamma, d_\gamma)).$$

Так как пересечение любых двух интервалов является интервалом, то $A \bigcap B = \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega,\, \gamma\in\Psi} ((a_\alpha, b_\alpha) \cap (c_\gamma, d_\gamma)) \in \tau_{\text{инт}}$, т.е. вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Если $S \subseteq \tau_{\text{инт}}$, то $S = \{A_\alpha \,|\alpha \in \Omega\}$, где $A_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma\in\Psi} (a_{\gamma,\alpha}, b_{\gamma,\alpha})$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} \left(\bigcup\limits_{\gamma\in\Psi} (a_{\gamma,\alpha}, b_{\gamma,\alpha}) \right)$, и значит, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha \in \tau_{\text{инт}}$, т.е. выполняется и третья аксиома определения 1.1. Следовательно, $\tau_{\text{инт}}$ является топологией.

Эта топология называется *интервальной* топологией, а топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$ называемое *пространством действительных чисел с интервальной топологией.*

1.15.1. Так как $U = \bigcup\limits_{V=U} V$ для любого $U \subseteq X$, то совокупность τ является базой пространства (X, τ).

1.15.2. Так как $U = \bigcup\limits_{b\in U} \{b\}$ для любого $U \subseteq X$, то совокупность $\Omega = \{\{x\}|x \in X\}$ является базой дискретного пространства (X, τ).

1.15.3. Так как любой интервал (a, b) можно представить как объединение интервалов (a_i, b_i) с рациональными концами, где $a < a_i$ и $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$ и $b_i < b$ и $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$, то совокупность Ω всех интервалов с рациональными концами является базой пространства $(\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$.

1.15.4. Если $U \in \tau_\rho$, то для любого элемента $a \in U$ существует такое натуральное число n_a, что $U_{a,n_a} = \{y \in X|\rho(a, y) < 2^{-n_a}\} \subseteq U$. Тогда $U = \bigcup\limits_{a\in U} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a\in U} U_{a,n_a} \subseteq U$, и значит $U = \bigcup\limits_{a\in U} U_{a,n_a}$, т.е. совокупность $\Omega = \{U_{a,k}|a \in X, k \in N\}$ является базой топологического пространства (X, τ_ρ).

2.2.1. В самом деле, если $A \in \tau$ и $a \in A$, то в качестве множества V, указанного в определении 2.1, возьмем A. Тогда $a \in A \subseteq A$, и значит, A является окрестностью точки a .

2.2.2. В самом деле, если $V = X$ и поскольку $X \in \tau$, то, согласно упражнению 2.2.1, $V = X$ является окрестностью точки a.

Кроме того, если V - окрестность точки a, то найдется такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq V$.

Так как $\tau = \{\emptyset, X\}$, то $U = X$, и значит, $V = X$.

2.2.3. Действительно, так как τ является дискретной топологией, то $A \in \tau$ и поскольку $a \in A$, то из упражнения 2.2.1 следует, что A является окрестностью точки a.

2.2.4. Действительно, если $V = (r-1, r+1)$, то $V \in \tau_{инт}$ и $r \in V \subseteq A$, и значит, A является окрестностью точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

Покажем теперь, что B не является окрестностью точки r.

Предположим противное, т.е. что B - окрестность точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$. Тогда существует $U \in \tau$, такое что $r \in U \subseteq B$. Так как U является объединением некоторых интервалов, то существует такой интервал (a, b), что $r \in (a, b) \in B$.

Поскольку в любом непустом интервале кроме рациональных чисел содержатся и иррациональные числа, а B содержит только рациональные числа, то получили противоречие.

Следовательно, наше предположение не верно и B не является окрестностью точки r.

2.5.1. В самом деле, если $U \in \Sigma_a = \{X\}$, то $U = X$. Так как $X \in \tau$, то согласно утверждению 2.3.4, X является окрестностью точки a в пространстве (X, τ).

Кроме того, если U - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то согласно упражнению 2.2.2, $U = X$. Тогда $X \subseteq U$, т.е. совокупность $\Omega_a = \{X\}$ удовлетворяет обоим условиям определения 2.4, и значит, она является базисом окрестностей точки a.

2.5.2. В самом деле, так как τ - дискретная топология, то $\{a\} \in \tau$, и значит, $\{a\}$ - окрестность точки a в пространстве (X, τ) (см. утверждение 2.3.4).

Кроме того, если V - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то $a \in V$ и значит $\{a\} \subseteq V$. Следовательно, Ω_a является базисом окрестностей точки a.

2.5.3. В самом деле, так как $a \in \{a\} \in \tau$, то $\{a\}$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ). Кроме того, если U - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то $a \in U$, и значит, $\{a\} \subseteq U$. Следовательно, Ω_a является базисом окрестностей точки a в пространстве (X, τ).

Проверим теперь выполнения условий определения 2.4 для совокупности Ω'.

Так как $X \in \tau$ и $b \in X$, то Xявляется окрестностью точки b. Кроме того, если U - окрестность точки b в пространстве (X, τ), то существует такое $V \in \tau$, что $b \in V \subseteq U$.

Так как $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то в качестве V можно взять только X. Но тогда $U = X$, и значит, $\Omega' = \{X\}$ является базисом окрестностей точки b в пространстве (X, τ).

Так как $\{a\} \in \tau$, то $\{a\}$ является окрестностью точки a, но в совокупности $\Omega' = \{X\}$ нет множества, которое содержится в $\{a\}$, т.е. не выполняется второе условие определения 2.4, и значит, $\Omega' = \{X\}$ не является базисом окрестностей точки a в пространстве (X, τ).

2.5.4. Действительно, $a \in U_n = \left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) \in \tau_{инт}$ для любого натурального числа n, и значит, каждое из множеств U_n является окрестностью точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

Кроме того, если V - окрестность точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$, то существует такое $W \in \tau_{инт}$, что $a \in W \subseteq V$.

Так как W является объединением некоторых интервалов, то существуют такие числа $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, что $a \in (a_0, b_0) \subseteq W$. Существует такое натуральное число n, что $a - \frac{1}{2^n} > a_0$ и $a + \frac{1}{2^n} < b_0$. Тогда $\left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) \subseteq (a_0, b_0) \subseteq W \subseteq V$.

Следовательно, Ω является базисом окрестностей точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

2.5.5. Так как множество $\mathbb{N} \backslash (\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\})$ является конечным, то $\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\} \in \tau$ и содержит 1. Тогда по теореме 2.3, оно является окрестностью точки 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

Кроме того, если U - окрестность 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$, то существует такое $V \in \tau$, что $1 \in V \subseteq U$. Тогда $\mathbb{N} \backslash V$ является конечным множеством.

Если $m = \max\{x \in \mathrm{N} \backslash V\}$, то $\{m+1, m+2, m+3, ...\} \subseteq V$. Так как $1 \in V$, то $\{1\} \cup \{m+1, m+2, m+3, ...\} \subseteq V$.

Следовательно, Ω является базисом окрестностей точки 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

3.2.1. Действительно, так как $\emptyset = X \backslash X \in \tau$ и $X \subseteq X$, то X является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), и так как $X = X \backslash \emptyset \in \tau$ и $\emptyset \subseteq X$, то $\emptyset$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

3.2.2. В самом деле, так как $\tau = \{\emptyset, X\}$, то если A - замкнутое множество в пространстве (X, τ) , то либо $A = X \backslash \emptyset = X$, либо $A = X \backslash X = \emptyset$.

3.2.3. В самом деле, $X \backslash A \in \tau$ для любого $A \subseteq X$, ибо τ состоит из всех подмножеств множества X.

3.2.4. Так как τ_1 - антидискретная топология, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{X, \emptyset\}$.

Так как τ_2 - дискретная топология, то замкнутыми множествами являются все подмножества множества X.

Так как $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, то $\emptyset = X \backslash X$, $\{a, b\} = X \backslash \emptyset$, $\{b\} = \{a, b\} \backslash \{a\}$, и значит, совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$.

Случай $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$, проверяется аналогично случаю для τ_3,

3.2.5. Как и при доказательстве 3.2.3 проверяется, что совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

3.2.6. Как и при доказательстве 3.2.3 проверяется, что

N	Топологии σ_i	Множество всех замкнутых множеств
1	$\{\emptyset, X\}$	$\{\emptyset, X\}$
2	$\{\emptyset, X, \{a\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}\}$
3	$\{\emptyset, X, \{b\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{a,c\}$\}$
4	$\{\emptyset, X, \{c\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{a,b\}$\}$
9	$\{\emptyset, X\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X,$ \{c\}$\}$
10	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{b,c\},\{c\}$\}$
11	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{a,c\},\{c\}$\}$
12	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
13	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X,$ \{b,c\},\{a,c\},\{c\}$\}$
17	$\{\emptyset, X,\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{b\}$\}$
18	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{b,c\},\{b\}$\}$
19	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
20	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{a,b\},\{b\}$\}$
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X,$ \{b,c\},\{a,b\},\{b\}$\}$
25	$\{\emptyset, X,\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X,$\{a\}$\}$

N	Топологии σ_i	Множество всех замкнутых множеств
26	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b.c\}\}$
27	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,c},{a}}
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,b},{a}}
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{b,c}, {c},{b}}
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}$,{b,c}, {c}}
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}$, {b,c},{b}}
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,b}, {b},{a}}
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}$, {b,a},{b}}
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,c},{a,b}, {b},{a}}
51	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,c},{c},{a}}
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}$, {a,c},{c}}
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}$, {a,c},{a}}
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\},$ $\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\},$ $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

3.7. В самом деле, если $k = 1$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{1} A_i = A_1$ является замкнутым множеством.

Допустим, что утверждение доказано для числа $k-1$. Тогда, учитывая 3.6.1, получаем, что $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i) \bigcup A_k$ является замкнутым множеством.

3.11.1. В самом деле, если V - произвольная окрестность точки x, то $x \in V$. Так как $x \in M$, то $x \in V \cap M$. Тогда $V \cap M \neq \emptyset$, т.е. x является точкой прикосновения к множеству M.

3.11.2. В самом деле, $\{a\}$ - открытое подмножество в пространстве (X, τ) , и значит, $\{a\}$ является окрестностью точки a. Так как a - точка прикосновения к M, то $\{a\} \cap M \neq \emptyset$, и значит, $a \in M$.

3.11.3. Это утверждение следует из предыдущих двух утверждений.

3.11.4. В самом деле, если $x \in X$ и $V-$ окрестность точки x, то, согласно 2.2.2, $V = X$, и значит, $V \cap M = X \cap M = M \neq \emptyset$, т.е. x является точкой прикосновения к множеству M.

3.11.5. Допустим противное, т.е. что некоторая точка $a \in X$ является точкой прикосновения к $\emptyset$. Тогда $X \in \tau$, и значит, X является окрестностью точки a.

Так как $X \cap \emptyset = \emptyset$, то получили противоречие. Следовательно, a не может быть точкой прикосновения к $\emptyset$.

3.11.6. В самом деле, если V - произвольная окрестность точки a, то найдется такое $U \in \tau_{инт}$, что $a \in U \subseteq V$. Так как $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha)$, то $a \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$ для некоторого $\alpha_0 \in \Omega$. Тогда $\emptyset \neq (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \cap (a, b) \subseteq U \cap (a, b) \subseteq V \cap (a, b)$, и значит $V \cap (a, b) \neq \emptyset$. Из произвольности окрестности V следует, что a является точкой прикосновения к (a, b).

Аналогично доказывается, что b является точкой прикосновения к (a, b).

3.11.7. В самом деле, для любого числа $r \in \mathbb{R}$, произвольная окрестность V этого числа содержит некоторый непустой интервал (a, b). Так как в любом непустом интервале содержится некоторое рациональное число, то $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Значит, $\mathbb{Q}$ является всюду плотным множеством в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

3.21.1. Следует непосредственно из определений 3.20, 1.1 и 3.1.

3.21.2. Следует непосредственно из определения 3.20, и определения антидискретной топологии (см. упражнение 1.3.1).

3.21.3. Следует непосредственно из упражнений 1.3.2 и 3.2.3.

3.21.4. Следует непосредственно из упражнений 1.3.3 и 3.2.4.

3.21.5. Следует непосредственно из упражнений 1.3.5 и 3.2.5.

3.22. Учитывая таблицы указанные в примере 1.9 и при решении упражнения 3.2.6, получаем следующую таблицу:

4.3. 1. В самом деле, если $U \subseteq A$, то $U \subseteq X$, и значит, $U \in \tau$. Тогда $U = U \cap A \in \tau|_A$, т.е. $(A, \tau|_A)$ - дискретное пространство.

4.3. 2. В самом деле, если $\emptyset \neq U \in \tau|_A$, то существует такое $\emptyset \neq V \in \tau$, что $U = V \cap A$. Так как (X, τ) - антидискретное пространство, то $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Значит $V = X$. Тогда $U = V \cap A = X \cap A = A$, и значит, $(A, \tau|_A)$ является антидискретным пространством.

N	Топологии σ_i	Множество всех открыто-замкнутых множеств
1	$\{\emptyset, X\}$	$\{\emptyset, X\}$
2	$\{\emptyset, X, \{a\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
3	$\{\emptyset, X, \{b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
4	$\{\emptyset, X, \{c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
9	$\{\emptyset, X\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
10	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
11	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
12	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
13	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
17	$\{\emptyset, X,\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
18	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
19	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
20	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
25	$\{\emptyset, X,\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
26	$\{\emptyset, X, \{a\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b.c\}\}$
27	$\{\emptyset, X, \{b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
31	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\}$
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X,\{a, c\}, \{b\}\}$
51	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\}$
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\},$ $\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\},$ $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

4.3.3. В самом деле, если $a \in \mathbb{Z}$, то $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right) \in \tau$. Так как $\{a\} = \mathbb{Z} \cap (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\ )$, то $\{a\}$ является открытым множеством в $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}|_{\mathbb{Z}})$ для любого $a \in \mathbb{Z}$.

Тогда в $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}|_{\mathbb{Z}})$ любое подмножество множества $\mathbb{Z}$ будет открытым, как объединение одноэлементных подмножеств, каждое из которых, как мы показали выше, является открытым множеством.

5.5. В самом деле, если $f : X \to Y$ является биективным отображением, то для каждого элемента $y \in Y$ имеется единственный элемент $x_y \in X$, такой, что $y = f(x_y)$.

Тогда, поставив каждому элементу $y \in Y$ в соответствии элемент $x_y \in X$ определим отображение $\varphi : Y \to X$, которое будет обратным отображением к отображению f, так как $f(\varphi(y)) = f(x_y) = y$ для любого $y \in Y$ и $\varphi(f(x)) = x$ для любого $x \in X$.

Пусть теперь для отображения $f : X \to Y$ существует обратное отображение $\phi : Y \to X$. Если $y \in Y$, то $\phi(y) \in X$, причем $y = f(\phi(y))$, т.е. отображение $f : X \to Y$ является сюръективным. Если $a \neq b \in X$, то $\phi(f(a)) = a \neq b = \phi(f(b))$. Поскольку $\phi : Y \to X$ является отображением, то $f(a) \neq f(b)$.

5.7.1. Если $a \in A_\gamma$, то $f(a) \in f(A_\gamma)$, и значит $a \in \{x \in X | f(x) \in f(A_\gamma)\} = f^{-1}(f(A_\gamma))$. Из произвольности элемента a следует, что $A_\gamma \subseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ будет инъективным отображением, и $b \in f^{-1}(f(A_\gamma))$. Тогда $f(b) \in f(A_\gamma)$, и значит $f(b) = f(a)$ для некоторого $a \in A_\gamma$. Так как $f : X \to Y$ является инъективным отображением, то $b = a \in A_\gamma$. Из произвольности элемента b следует, что $A_\gamma \supseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$, и значит $A_\gamma = f^{-1}(f(A_\gamma))$.

5.7.2. Если $b \in f(f^{-1}(B_\gamma))$, то $b = f(a)$ для некоторого элемента $a \in f^{-1}(B_\gamma) = \{x \in X | f(x) \in B_\gamma\}$, и значит, $b = f(a) \in B_\gamma$. Из произвольности элемента b следует, что $f(f^{-1}(B_\gamma)) \subseteq B_\gamma$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ является сюръективным отображением и $b \in B_\gamma$. Посколькуf является сюръективным отображением, то $b = f(x)$ для некоторого элемента $x \in X$. Тогда $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, и значит, $b = f(x) \in f(f^{-1}(B_\gamma))$. Из произвольности элемента b следует, что $f(f^{-1}(B_\gamma)) \supseteq B_\gamma$, и значит, $f(f^{-1}(B_\gamma)) = B_\gamma$.

5.7.3. Если $b \in f(\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$, то существует такой элемент $a \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, что

$b = f(a)$. Тогда $a \in A_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $b = f(a) \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ является инъективным отображением, и $b \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$. Тогда для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует такой элемент $a_\gamma \in A_\gamma$, что $b = f(a_\gamma)$. Из инъективности отображения f следует, что все a_γ равны между собой, т.е. $a_\gamma = a$, причем $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Тогда $b = f(a) \in f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.

Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \supseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, и значит, $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

5.7.4. Если $a \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$, то $f(a) \in B_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $a \in f^{-1}(B_\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Тогда $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \subseteq . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

Пусть теперь $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Тогда $f(a) \in B_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $f(a) \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, т.е. $a \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \supseteq . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, и значит $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

5.7.5. Если $b \in f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2})$, то $b \in f(A_{\gamma_1})$ и $b \notin f(A_{\gamma_2})$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}$, что $b = f(a)$, причем $a \notin A_{\gamma_2}$. Значит, $a \in A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2}$, т.е. $b = f(a) \in f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента b следует, что $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) \subseteq f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ будет инъективным отображением и $b \in f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2}$, что $b = f(a)$. Из инъективности отображения f следует, что $b = f(a) \notin f(A_{\gamma_2})$, и значит $b \in f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента b следует, что $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) \supseteq f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$, и значит, $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) = f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$.

5.7.6. Это утверждение является частным случаем предыдущего утверждения (нужно взять $A_{\gamma_1} = X$ и $A_{\gamma_2} = A_\gamma$).

5.7.7. Если $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2})$, то $f(a) \in B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2}$, и значит, $f(a) \in B_{\gamma_1}$ и $f(a) \notin B_{\gamma_2}$. Тогда $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ и $a \notin f^{-1}(B_{\gamma_2})$, и значит,

$a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})\backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2}) \subseteq f^{-1}(B_{\gamma_1})\backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$.

Если же $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})\backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, то $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ и $a \notin f^{-1}(B_{\gamma_2})$. Тогда $f(a) \in B_{\gamma_1}$ и $f(a) \notin B_{\gamma_2}$, и значит $f(a) \in B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2}$. Следовательно, $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2}) \supseteq f^{-1}(B_{\gamma_1})\backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, и значит, $f^{-1}(B_{\gamma_1}\backslash B_{\gamma_2}) = f^{-1}(B_{\gamma_1})\backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$.

Так как $X = f^{-1}(Y)$, то второе равенство является частным случаем только что доказанного равенства (нужно взять $B_{\gamma_1} = Y$ и $B_{\gamma_2} = B_\gamma$).

5.7.8. Пусть $b \in f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$. Тогда существует такой элемент $a \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, что $b = f(a)$. Если $\gamma_1 \in \Gamma$ такой элемент, что $a \in A_{\gamma_1}$, то $b = f(a) \in f(A_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

Аналогично, если $b \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, то $b \in f(A_{\gamma_1})$ для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$.

Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}$, что $b = f(a)$, и значит, $b \in f(A_{\gamma_1}) \subseteq f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \supseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, и значит, $f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

5.7.9. Если $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$, то $f(a) \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, и значит, $f(a) \in B_{\gamma_1}$ для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

Аналогично, если $a \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, то $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда $f(a) \in B_{\gamma_1} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, и значит, $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \supseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, и значит, $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

5.7.10. Пусть $X = \{a, b\}$ и $Y = \{c, d\}$. Если $f : X \to Y$ - такое отображение, что $f(a) = f(b) = c$, то:
$\{a\} \neq \{a, b\} = f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}(f(\{a\}))$;
$\{c, d\} \neq \{c\} = f(\{a, b\}) = f(f^{-1}(\{c, d\}))$;
$f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\emptyset) \neq \{c\} = f(\{a\}) \cap f(\{\{b\})$;

$$f(\{a,b\}\backslash\{a\}) = f(\{b\}) = \{c\} \neq \emptyset = \{c\}\backslash\{c\} = f(\{a,b\})\backslash f(\{a\}).$$

5.11.1. В самом деле, пусть $x \in X$ и U - любая окрестность точки $f(x)$, в пространстве (Y, τ_2). Тогда $f(x) \in U$. Так как (X, τ_1) - дискретное пространство, то $\{x\} \in \tau_1$, и значит, $\{x\}$ - окрестность элемента x в (X, τ_1). Тогда $f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq U$, т.е. отображение f является непрерывным в точке x.

Из произвольности элемента x следует непрерывность отображения f.

5.11.2. Действительно, пусть $x \in X$ и U - окрестность точки $f(x)$ в пространстве (Y, τ_2). Так как (Y, τ_2) - антидискретное пространство, то, согласно упражнению 2.2.2, $U = Y$. Так как X - окрестность точки x в пространстве (X, τ) (ибо $X \in \tau$ и $x \in X$), то $f(X) \subseteq Y = U$, и значит f является непрерывным отображением в точке x.

Из произвольности точки x следует непрерывность отображения f.

5.11.3. Этот результат доказывается в курсе математического анализа.

5.15.1. Действительно, если $U \in \tau_1$, то $f(U) \in \tau_2$ (потому что $f(U) \subseteq Y$ и τ_2 - дискретная топология).

Кроме того, если F - замкнутое множество в пространстве (X, τ_1), то $f(F) \subseteq Y$, и значит (см. упражнение 3.2.3), $f(F)$ является замкнутым множеством в пространстве (Y, τ_2).

5.15.2. В самом деле, если $U \in \tau_1$, то либо $U = \emptyset$, либо $U = X$.

Если $U = \emptyset$, то $f(U) = f(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2$ и если $U = X$, то $f(U) = f(X) = Y \in \tau_2$.

Значит fявляется открытым отображением.

Аналогично доказывается, что f является замкнутым отображением.

5.15.3.

1) Если $U \in \tau_2$, то из непрерывности отображения $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ (см. теорему 5.13) следует, что $f^{-1}(U) \in \tau_1$, и значит, отображение $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является открытым, т.е. 1) $\Rightarrow$ 2).

2) Если $U \in \tau_2$, то из открытости отображения $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ следует, что $f^{-1}(U) \in \tau_1$, и значит (см. теорему 5.13), отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным, т.е. 2) $\Rightarrow$ 1).

Следовательно, 1) $\Leftrightarrow$ 2).

3) Из равенства $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ для любого подмножества $A \subseteq Y$ следует, что 2) $\Leftrightarrow$ 3).

5.23.1. В самом деле, $\tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\} = \{f^{-1}(Y), f^{-1}(\emptyset)\} = \{X, \emptyset\}$, т.е. τ_f является антидискретной топологией.

5.23.2 В самом деле, если $A \subseteq X$, то $U = f(A) \subseteq Y$, и значит, $f(A) \in \tau_2$. Тогда, согласно упражнению 5.7.1, $A = f^{-1}(f(A)) \in \tau_f$, т.е. τ_f является дискретной топологией.

5.23.3. Пусть $W \in \tau_3$. Тогда, согласно теореме 5.13, $\varphi^{-1}(W) \in \tau_2$, и значит, $(\varphi \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(\varphi^{-1}(W)) \in \tau_1$.

Из произвольности W следует (см. теорему 5.13), что $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ является непрерывным отображением.

5.23.4. Пусть $U \in \tau_1$. Тогда $f(U) \in \tau_2$, и значит, $\varphi(f(U)) \in \tau_3$.

Из произвольности U следует, что $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ является открытым отображением.

5.23.5. Пусть $a \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как для каждого $1 \leq i \leq n$ отображение $f_i : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ является непрерывным, то существует такая окрестность U_i точки a в пространстве (X, τ), что $f(a) - \varepsilon < f_i(x) < f(a) + \varepsilon$ для любого $x \in U_i$. Если $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ будет окрестностью точки a в пространстве (X, τ), причем для каждого $y \in U$ имеем :

$f(y) = \max\{f_1(y), \ldots, f_n(y)\} > \max\{f_1(a) - \varepsilon, \ldots, f_n(a) - \varepsilon\} = f(a) - \varepsilon$
и

$f(y) = \max\{f_1(y), \ldots, f_n(y)\} < \max\{f_1(a) + \varepsilon, \ldots, f_n(a) + \varepsilon\} = f(a) + \varepsilon$,
т.е. $f(a) - \varepsilon < f(y) < f(a) + \varepsilon$. Из произвольности числа ε и элемента a следует, что отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным.

6.2.1. В самом деле, если $A \in \tau_2$, то $A \subseteq X$. Тогда $A \in \tau_2$ (см. определение дискретной топологии), т.е. $\tau_1 \subseteq \tau_2$, и значит, $\tau_1 \leq \tau_2$.

6.2.2. В самом деле, $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$ (см. определение антидискретной топологии). Так как $X \in \tau_2$ и $\emptyset \in \tau_2$, то $\tau_1 \subseteq \tau_2$, и значит, $\tau_1 \leq \tau_2$.

6.6.1. Очевидно, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка $\leq$ является частично упорядоченным множеством, ибо в нем выполнены все аксиомы определения 6.5.

6.6.2. Легко проверить, что это введенное бинарное отношение удовлетворяет всем аксиомам определения 6.5 , и значит, $\mathbb{N}$ является частично упорядоченным множеством.

6.6.3. Это не будет частично упорядоченным множеством, ибо число 2 делится на число -2, и значит, $-2 \leq 2$. Кроме того, число -2 делится на число 2, и значит, $2 \leq -2$, Но $2 \neq -2$, т.е. не выполняется 3-е условие определения 6.5.

6.6.4. Легко заметить, что первая и вторая аксиомы определения 6.5 выполняются.

Кроме того, если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b^s$ и $b = a^k$. Тогда $b = a^k = (b^s)^k = b^{sk}$, и значит, $sk = 1$. Так как $k, s \in \mathbb{Z}$, то $s = k = 1$ или $s = k = -1$.

Если $s = k = 1$, то $a = b$.

Если же $s = k = -1$, то $b = a^{-1} \notin \mathbb{Z}$ для $a \neq \pm 1$. Значит $a = \pm 1$. Тогда $b = a^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = a$. Следовательно, выполняется и третья аксиома определения 6.5.

6.6. 5. Легко проверяется, что это бинарное отношение удовлетворяет всем аксиомам определения 6.5 , т.е. это множество будет частично упорядоченным множеством.

6.9.1. $\inf M = \sqrt{2}$ и $\sup M = \sqrt{3}$.

6.9.2. $\inf M$ и $\sup M$ не существуют, ибо $\sqrt{2} \notin S$ и для любого рационального числа r, которое меньше всех рациональных чисел интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ существует такое рациональное число q, что $r < q$ и q меньше всех рациональных чисел интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Значит, $\inf M$ не существует.

Аналогично доказывается, что $\sup M$ не существует.

7.4.1. Если X содержит больше чем 1 элемент, то в антидискретном пространстве (X, τ) выполняются только аксиомы T_3 и T_4, ибо:

Если для замкнутого множества F существует такая точка $d \in X$, что $d \notin F$, то $F = \emptyset$, и тогда $U = \emptyset \in \tau$ и $V = X \in \tau$ удовлетворяют условию, которое указано в формулировке аксиомы T_3;

Аналогично, если A, B - непересекающиеся замкнутые множества в антидискретном пространстве, то хотя бы одно из них является пустым множеством. Тогда $U = \emptyset$ и $V = X$ удовлетворяют условиям, которые указаны в формулировке аксиомы T_4.

Покажем теперь, что в антидискретном пространстве не выполняется аксиома T_0.

Если $a, b \in X$ - две различные точки, то всякая окрестность элемента a равна X, и значит $b \in X$.

Аналогично, всякая окрестность элемента b равна X, и значит $a \in X$.

Следовательно, ни одна из других аксиом отделимости кроме аксиом T_3 и T_4 в антидискретном пространстве не выполняется.

7.4.2. В дискретном пространстве выполняются все аксиомы отделимости.

В самом деле, если $a \neq b$, то $\{a\} \in \tau$ и $a \in \{a\}$, и значит, $\{a\}$ является окрестностью точки a.

Аналогично $\{b\}$ - окрестность точки b.

Так как $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, то аксиома T_2 выполняется.

Тогда по теореме 7.2. выполняются и аксиомы T_1 и T_0.

Пусть теперь A, B - такие замкнутые множества в пространстве (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Так как пространство (X, τ) является дискретным, то $A, B \in \tau$. Взяв $U = A$ и $V = B$, видно, что аксиома T_4 выполняется, т.е. дискретное пространство является нормальным.

Согласно теореме 7.2.4, пространство (X, τ) является вполне регулярным, и значит, оно является регулярным.

Следовательно, в дискретном пространстве выполняются все аксиомы отделимости.

7.4.3. В этом топологическом пространстве выполняются только аксиомы T_0 и T_4

В самом деле, если $x \neq y \in X$, то один из этих элементов равен a, а другой равен b. Тогда множество $\{a\}$ является окрестностью точки a, причем $b \notin \{a\}$, т.е. аксиома T_0 выполняется.

Так как любая окрестность точки b равна X и $a \in X$, то аксиома T_1 не выполняется. Тогда по утверждению 7.2.1, не выполняется и аксиома T_2.

Легко заметить, что $F = \{b\}$ является замкнутым множеством. Взяв элемент a, видим, что всякое открытое множество, содержащее $F = \{b\}$, содержит и a, и значит, аксиома T_3 не выполняется.

Пусть теперь A, B - такие замкнутые множества в (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Так как $\{\emptyset, X, \{b\}\}$ является совокупностью всех замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих двух замкнутых множеств A, B должно совпадать с $\emptyset$. Тогда $U = \emptyset$ и $V = X$ удовлетворяют аксиоме T_4, т.е. аксиома T_4 выполняется.

7.4.4. В этом топологическом пространстве выполняются только аксиомы T_0 и T_1.

В самом деле, так как $U = X \setminus \{a\} \in \tau$ для любого элемента $a \in X$, и значит, U является окрестностью любого элемента $b \neq a$, причем $a \notin U$. Из произвольности элементов a и b следует, что в топологическом пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1, и значит, выполняется и аксиома T_0.

Пусть теперь $a \neq b$ и пусть U - окрестность точки a, а V - окрестность точки b. Тогда существуют такие $U^* \in \tau$ и $V^* \in \tau$, что $a \in U^* \subseteq U$ и $b \in V^* \subseteq V$, и значит, $X \setminus U^*$ и $X \setminus V^*$ - конечные множества. Из бесконечности множества X следует, что существует такой элемент $d \in X$, что $d \notin (X \setminus U^*) \cup (X \setminus V^*) = X \setminus (U^* \cap V^*)$. Тогда $d \in U \cap V$, и значит, $U \cap V \neq \emptyset$. Из произвольности окрестностей U и V следует, что аксиома T_2 не выполняется.

Так как в этом пространстве всякое одноэлементное множество является замкнутым (см. утверждение 7.2.3) , то из того, что в нем не выполняется аксиома T_2, следует, что в нем не выполняются и аксиомы T_3 и T_4.

7.5. В самом деле, в антидискретном пространстве, содержащем больше одного элемента, не выполняется аксиома T_0.

В 7.4.3. указано пространство, которое является T_0 пространством, но не является T_1 пространством;

В. 7.4.4. указано пространство, которое является T_1 пространством, но не является T_2 пространством.

7.7.1. В самом деле, при усилении топологии всякая окрестность точки и всякое открытое множество остаются окрестностью точки и открытым множеством, соответственно. Тогда:

1. Если (X, τ_1) является T_0 пространством и $a \neq b$, то существует такая окрестность U, например, точки a в пространстве (X, τ_1), что $b \notin U$. Но тогда U является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_2), т.е. аксиома T_0 выполняется и для пространства (X, τ_2).

2. Если (X, τ_1) является T_1 пространством и $a \neq b$, то существует такая окрестность U точки a в пространстве (X, τ_1), что $b \notin U$, но тогда U является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_2).

Аналогично доказывается, что в пространстве (X, τ_2) точка b обладает такой окрестностью V, что $a \notin V$, т.е. аксиома T_1 выполняется и для пространства (X, τ_2).

3. Если (X, τ_1) является T_2 пространством и $a \neq b$, то существуют такие окрестности U и V точек a и b в пространстве (X, τ_1) соответственно, что $U \cap V = \emptyset$, но тогда U и V будут окрестностями точек a и b в пространстве (X, τ_2) соответственно, и значит, аксиома T_2 выполняется для пространства (X, τ_2).

7.7.2. Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $A \subseteq X$.

Если (X, τ) является T_0 пространством и $a \neq b \in A$, то в пространстве (X, τ), например, точка a обладает такой окрестностью U, что $b \notin U$. Тогда $U \cap A$ будет окрестностью точки a в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $b \notin U \cap A$.

Аналогично доказывается и случай когда (X, τ) является T_1 пространством.

Если (X, τ) является T_2 пространством и $a \neq b \in A$, то в пространстве (X, τ) существуют такие окрестности U и V точек a и b соответственно, что $U \cap V = \emptyset$. Тогда $U \cap A$ и $V \cap A$ будут окрестностями точек a и b соответственно, в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$, т.е. $(A, \tau|_A)$ является T_2 пространством.

Пусть (X, τ) является T_3 пространством, F - замкнутое множество в пространстве $(A, \tau|_A)$ и $a \in A \backslash F$. Тогда существует такое замкнутое в пространстве (X, τ) множество B, что $F = A \cap B$. Так как $a \in A$, то $a \notin B$.

Существуют такие $U, V \in \tau$, что $a \in U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда $U \cap A, V \cap A \in \tau|_A$, причем $a \in U \cap A$ и $F = B \cap A \subseteq V \cap A$, т.е. $(A, \tau|_A)$ является T_3 пространством.

Если же (X, τ) является вполне регулярным пространством, то (X, τ) является T_1 пространством и существует такое непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$, что $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого $x \in X$, $f(a) = 0$ и $f(B) \subseteq \{1\}$. Тогда $(A, \tau|_A)$ будет T_1 пространством и, согласно теореме 5.19, $f|_A : (A, \tau|_A) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ является непрерывным отображением, причем $0 \leq f|_A(x) \leq 1$ для любого $x \in A$, $f(a) = 0$ и $f(F) \subseteq \{1\}$, т.е. $(A, \tau|_A)$ является вполне регулярным пространством.

7.8. В самом деле, в множестве $X = \{a, b\}$ с антидискретной топологией выполненяются аксиомы T_3 и T_4, а в X с топологией $\tau =$

$\{\emptyset, \{a\}, X\}$, которая сильнее андидискретной топологии не выполняются аксиомы ни T_3 и ни T_4 (см. упражнение 7.4.3).

8.4.1. Действительно, пусть $\{U_\alpha \,|\alpha \in A\}$ - открытое покрытие множества X. Так как $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = X$ и $U_\alpha \in \{\emptyset, X\}$ для любого $\alpha \in A$, то $U_{\alpha_0} = X$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Тогда $\{U_{\alpha_0}\}$ - конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha \,|\alpha \in A\}$.

8.4.2. В самом деле, если $X = \{x_1, \cdots, x_k\}$ и Δ - произвольное открытое покрытие пространства (X, τ), то для каждого $1 \leq i \leq k$ существует такое $U_i \in \Delta$, что $x_i \in U_i$. Тогда $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \Delta$ и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$, т.е. $\{U_1, \ldots, U_k\}$ является конечным подпокрытием покрытия Δ.

Из произвольности покрытия Δ следует компактность топологического пространства (X, τ).

8.4.3. В самом деле, согласно 8.4.2, $(S, \tau|_S)$ является компактным пространством, и значит, S является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ).

8.4.4. В самом деле, пусть Δ - произвольное открытое покрытие пространства (X, τ). Так как $X \neq \emptyset$, то существует $\emptyset \neq U \in \Delta$. Из определения τ следует, что $X \backslash U$ является конечным, т.е. $X \backslash U = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Тогда для любого $1 \leq i \leq n$ существует такое $U_i \in \Delta$, что $x_i \in U_i$, и значит, $\{U, U_1, \cdots, U_n\}$ является конечным подпокрытием покрытия Δ топологического пространства (X, τ).

8.8.1. В самом деле, выполнения условий 1 – 3 определения 8.7 очевидны.

8.8.2. В самом деле, так как $a \in U$ для любого $U \in \Phi_a$, то $\emptyset \notin \Phi_a$, т.е. первое условие определения 8.7 выполняется.

Пусть $U, V \in \Phi_a$ и $W = U \cap V$. Согласно утверждению 2.3.3, W является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и значит $W \in \Phi_a$. Этим мы проверили, что выполняется и второе условие определения 8.7.

Пусть $U \in \Phi_a$ и $U \subseteq V$. Согласно утверждению 2.3.2 V является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и значит $V \in \Phi_a$. Этим мы проверили, что выполняется и третье условие определения 8.7.

8.11.1. В самом деле, учитывая определение 8.10, это утверждение легко доказывается индукцией по числу n.

8.11.2. Действительно, так как $a \in \{a\}$, то $\{a\} \in \Phi_a$, и значит, $B \subseteq \Phi_a$.

Если $A \in \Phi_a$, то $a \in A$, и значит $\{a\} \subseteq A$.

Следовательно, B является базисом фильтра Φ_a

8.11.3. В самом деле, если $U \in B'$, то $U-$ окрестность точки a в топологическом пространстве (X, τ), и значит, $U \in \quad \Phi'_a$, т.е. первое условие определения 8.10 выполняется.

Кроме того, если $V \in \Phi'_a$, то $V-$ окрестность точки a в топологическом пространстве (X, τ), и согласно 2.4 , существует такое $U \in B'$, что $U \subseteq V$.

Следовательно, B' - базис фильтра Φ'_a.

9.2.1. Это пространство является связным ибо, если A - открыто-замкнутое множество, то $A \in \tau = \{X, \emptyset\}$. Значит, $A = \emptyset$ или $A = X$.

9.2.2. Это множество является связным, так как пространство $(A, \tau|_A)$ является антидискретным пространством, и значит $(A, \tau|_A)$ является связным пространством (см. 9.2.1).

9.2.3. Это множество не является связным, так как $\{a\} \in \tau|_A$ и $A \setminus \{a\} \in \tau|_A$, т.е. $\{a\}$ является открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $\{a\} \neq A$ и $\{a\} \neq \emptyset$.

9.2.4. Это пространство является связным, ибо $F = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$ является множеством всех замкнутых, и значит, открыто-замкнутыми множествами в пространстве (X, τ) являются только $\emptyset$ и X.

9.2.5. Это пространство является связным, так как согласно теореме 3.24, открыто-замкнутыми множествами в нем являются только $\emptyset$ и $\mathbb{R}$.

9.8. Согласно утверждению 9.6.1, $\{a\} = C_a$ является замкнутым множеством для любого $a \in X$, и тогда согласно утверждению 7.2.2, топологическое пространство (X, τ) является T_1 пространством.

Рекомендуемая литература

1. П.С.Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Москва 1948 Ленинград.

2. Н.Бурбаки, Общая топология (Основные структуры), Москва 1958

3. К.К.Куратовский, Топология т.1, издательство “Мир”, Москва 1966;

4. В.В.Федорчук, В.В.Филиппов, Общая топология, основные конструкции, издательство Московского Университета 1988;

5. Р.Энгелькинг, Общая топология, Москва “Мир” 1986

Список обозначений

Список терминов