

Две проблемы, относящиеся к качественной теории гамильтоновых систем

Е.А. Grebenikov

Abstract. Two problems of KAM-theory, which are not solved still, are discussed

Mathematics subject classification: 70F10, 70H08.

Keywords and phrases: Hamiltonian differential equations, Lyapunov stability, quasi-periodic solution, stationary solution.

Существенное развитие математики в XIX столетии и, прежде всего, математического анализа, аналитической, качественной и численной теорий дифференциальных уравнений, разработка Максвеллом математических основ электродинамики вместе с выдающимися астрономическими открытиями (наряду с великим открытием планеты Нептун, приведем, например, открытие Фраунгофером спектрального анализа) предопределили появление знаменитого трехтомного сочинения А.Пуанкаре "Новые методы небесной механики" [1]. Гениальный трактат обусловил развитие многих направлений математики XX столетия и, в частности, способствовал появлению и развитию ее раздела, который ныне хорошо известен под названием КАМ-теория. К 1967 году ее создатели А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд и Ю. Мозер сформулировали и доказали основные теоремы, составляющие ее фундамент [2–5]. Сегодня "КАМ-теория" (сама аббревиатура появилась позднее) объединяет проблемы и фундаментальные результаты А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, Ю. Мозера, а также их учеников и последователей по аналитической и качественной теории условно-периодических решений гамильтоновых систем, задаваемых на многомерных торах. Математическая теория нелинейных колебаний, трактуемая нами как теория периодических и почти периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений безусловно относится к тому разделу, для которого методы КАМ-теории представляются наиболее эффективными. В "Новых Методах" Пуанкаре, сформулировал следующую проблему.

Пусть заданы две функции $2n$ переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$:

$$F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in C^{(1)}(G_{2n}), \quad F_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in C^{(1)}(G_{2n}),$$

где G_{2n} – область $2n$ -мерного евклидова пространства специальной структуры, типичной для пространств периодических функций "с многими периодами" [4]. Говорят, что функции F_1 и F_2 *находятся в инволюции* в G_{2n} , если их скобка

Пуассона [1, 3] в G_{2n} равна нулю, т.е. если

$$(F_1, F_2) \equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_k} - \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим автономную гамильтонову систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(p, q) &\equiv H_0(p) + \mu H_1(p, q), \quad 0 \leq \mu \ll 1, \\ H_1(p, q) &\equiv H_1(p, q + (2\pi)), \end{aligned} \quad (3)$$

аналитическим в $2n$ -мерной области

$$G_{2n} = \left\{ p \in G_n, \|\operatorname{Im} q\| < \rho < 1, \|\operatorname{Im} q\| = \sum_{s=1}^n \|\operatorname{Im} q_s\| \right\}, \quad (4)$$

где n – мерное многообразие G_n состоит из n -мерных торов, а Фурье-представление гамильтониана является n -кратным сходящимся рядом по переменным q (нами использована символика В.И. Арнольда [3, 4]).

Теорема Лиувилля [1, 4]. *Если известны n независимых первых интегралов системы (2), удовлетворяющих инволюционному равенству (1), тогда гамильтонова система (2) интегрируема в квадратурах.*

Формулировка теоремы Лиувилля не содержит утверждений, связанных с преобразованиями гамильтоновой системы (2), но Пуанкаре сформулировал проблему интегрируемости основных уравнений классической динамики, т.е. гамильтоновых систем вида (2), в терминах их преобразования к следующему виду:

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{Q}}, \quad \frac{d\tilde{Q}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}} = \omega(P), \quad (5)$$

где новый гамильтониан зависит только от "медленных" переменных P , но не зависит от "быстрых" переменных Q .

Иными словами, требуется доказать теорему существования такого невырожденного канонического преобразования $(p, q) \longrightarrow (P, Q)$, которое преобразует гамильтонову систему (2) в систему (5) и обратно, систему (5) в систему (2). Именно Пуанкаре сформулировал и фактически наметил путь к решению следующей **проблемы**:

Решить проблему существования и построить такое невырожденное каноническое преобразование [3–5]

$$p = \varphi(P, Q), \quad q = \psi(P, Q), \quad (6)$$

которое преобразует систему (2) с гамильтонианом, удовлетворяющим условиям (3) – (4), в систему (5), в которой новый гамильтониан зависит только от новых "медленных" переменных (новых "импульсов" P) и не зависит от новых "быстрых" переменных (фазовых углов Q) [6].

Эта проблема является центральной проблемой в КАМ-теории и, помимо корректного подхода, который подразумевает обязательное исследование сходимости встречающихся преобразований, она была объектом исследования и в интерпретации "асимптотической" [1]. Здесь фундаментальные пионерские работы принадлежат Н.Н. Боголюбову, Ю.А. Митропольскому, А.М. Самойленко [7, 8]. Асимптотическая теория многочастотных систем, построенная на базе специальных схем усреднения, учитывающих наличие частотных резонансов, которые являются основным препятствием при фактическом построении указанных преобразований, была предложена в работах [9, 10]. Гамильтониан (2) удовлетворяет теореме Дирихле о существовании его Фурье-разложения [11] в области G_{2n} , т.е. его можно представить n -кратным рядом Фурье по "угловым" переменным q , который в комплексной форме имеет вид

$$H(p, q) = \sum_{\|k\| \geq 0} h_k(p) e^{i(k, q)},$$

$$(k, q) = \sum_{s=1}^n k_s q_s, \quad \|k\| = \sum_{s=1}^n |k_s|, \quad k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = \sqrt{-1},$$
(7)

$$h_k(p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H(p, q) e^{-i(k, q)} dq_1 \dots dq_n.$$
(8)

Коэффициенты Фурье $h_k(p)$ разложения (7) являются быстро убывающими величинами с ростом нормы целочисленного вектора, т.е. $\|k\|$, и удовлетворяют "экспоненциальной" оценке В.И. Арнольда [4]

$$\|h_k(p)\| \leq M e^{-\|k\|^\rho},$$
(9)

где M и ρ – некоторые положительные константы.

В силу этого, представляется целесообразным поиск преобразования (6) в виде n -кратных тригонометрических рядов [4, 6]

$$\begin{cases} p = \varphi(P, Q) = \sum_{\|k\| \geq 0} \varphi_k(P) e^{i(k, Q)}, \\ q = \psi(P, Q) = \sum_{\|k\| \geq 0} \psi_k(P) e^{i(k, Q)}, \end{cases}$$
(10)

где коэффициенты $\varphi_k(P)$, $\psi_k(P)$, в свою очередь, представляются степенными рядами вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(P) = \sum_{\|s\| \geq \|k\|} a_s P^s \equiv \sum_{s_1+s_2+\dots+s_n \geq \|k\|}^{\infty} a_{s_1, s_2, \dots, s_n} P_1^{s_1} P_2^{s_2} \dots P_n^{s_n}, \\ \psi_k(P) = \sum_{\|s\| \geq \|k\|} b_s P^s, \end{array} \right. \quad (11)$$

$$s_j = 0, 1, 2, \dots, \quad k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

с неизвестными коэффициентами a_s, b_s , которые подлежат определению.

Если продифференцировать выражения (10) по t и подставить их в левые части основной гамильтоновой системы (2), а в правых частях осуществить замену (10) с коэффициентами из (11), то после выполнения соответствующих операций (среди них алгебраические операции над коэффициентами Фурье и операции дифференцирования) в принципе может быть выписана *бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений* с неизвестными a_s, b_s , вида

$$F_r(a_0, b_0, \dots, a_s, b_s) = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Решение алгебраической задачи (12) *эквивалентно* задаче о построении замены переменных (10) тогда и только тогда, когда ряды (10) и (11) являются сходящимися в соответствующих областях.

Фундаментальный результат Пуанкаре о расходимости рядов небесной механики [1] применительно к поиску преобразования (6) состоит в том, что ряды вида (10) являются расходящимися из-за присутствия в структуре коэффициентов $\varphi_k(P)$ и $\psi_k(P)$ *малых знаменателей типа* $(k, \tilde{\omega}(P))$, которые при $\|k\| \rightarrow \infty$ могут быть сколь угодно малыми, в том числе и нулевыми величинами, причем "*случайность*" такого поведения величин $(k, \tilde{\omega}(P))$ как функций вектора k можно считать основным препятствием при исследовании их сходимости.

Рассмотрим условие

$$|(k, \tilde{\omega}(P))| = \alpha \ll 1, \quad (13)$$

которое принято называть α -резонансом частот $\tilde{\omega}_1(P), \tilde{\omega}_2(P), \dots, \tilde{\omega}_n(P)$ [12]. При $\alpha = 0$ мы имеем точный резонанс частот. Очевидно, что резонансы могут возникнуть только при $n \geq 2$, т.е. могут иметь место в двух, трех и так далее многочастотных динамических системах. Если переменные Q в гамильтоновой системе (5) трактовать как фазовые углы, то тогда в физическом смысле величины $\tilde{\omega}_1(P), \tilde{\omega}_2(P), \dots, \tilde{\omega}_n(P)$ – это угловые скорости, или, как принято их называть в теории колебаний, *частоты*. Именно появление в процессе интегрирования гамильтоновой системы (2) частотных резонансов вида (13), неизбежно приводит к расходимости рядов, участвующих в вышеуказанных преобразованиях.

Это побудило Пуанкаре предложить теорию *асимптотических представлений* (синонимом этого понятия является *асимптотический ряд*), на основе которой была разработана теория асимптотической интегрируемости дифференциальных уравнений динамики.

Комментарием к этим рассуждениям может служить отрывок из знаменитого сочинения Пуанкаре "Новые методы небесной механики" [1]: "Геометры и астрономы по-разному понимают слово сходимость. Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений, говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены ряда убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, не смотря на то, что последующие его члены неограниченно возрастают Обе точки зрения законны: первая – в теоретических исследованиях, вторая – в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать".

Отметим также, что последние десятилетия получила также развитие топологическая трактовка проблемы интегрируемости гамильтоновых систем [13,14], состоящая в построении глобальной классификации траекторий динамических систем по их различным признакам и связанное с этим разделение фазового пространства на области, включающие в себя траектории различных классов. Так или иначе, исследования Пуанкаре показали, что основным препятствием к интегрированию гамильтоновых систем (2) являются малые знаменатели типа (13), неизбежно появляющиеся в искомым рядах. Что касается построения бесконечной последовательности невырожденных преобразований

$$(p, q) \leftrightarrow (p^{(1)}, q^{(1)}) \leftrightarrow (p^{(2)}, q^{(2)}) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (p^{(n)}, q^{(n)}) \leftrightarrow \dots \equiv (P, Q), \quad (14)$$

которая преобразует систему (2) в интегрируемую систему (5), такое решение может быть достигнуто лишь в рамках КАМ-теории. Фазовые многообразия, в которых существуют сходящиеся невырожденные канонические преобразования, составляют бесконечную последовательность включений

$$G_{2n} \supset G_{2n}^{(1)} \supset G_{2n}^{(2)} \supset \dots \supset G_{2n}^{(m)} \supset \dots \equiv G_{2n}^*,$$

причем предельное многообразие G_{2n}^* не должно быть пустым ($G_{2n}^* \neq \emptyset$) и его можно записать в виде

$$G_{2n}^* = \{P \in G_n^*, \|\operatorname{Im} Q\| < \rho^* \leq \rho < 1\}.$$

Сходимость итерационного процесса (14) гарантируется методом ускоренной сходимости [4], в котором k -я итерация имеет порядок малости

$$(p^{(k)}, \Delta q^{(k)}) = O(\mu^{2^k})$$

где $\Delta q^{(k)}$ – "возмущение", т.е. "малый добавок" к фазовой угловой переменной $q^{(k)}$.

Если строить итерации классическим методом, для которого порядок малости k -й итерации имеет "степенную" оценку

$$(p^{(k)}, \Delta q^{(k)}) = O(\mu^k),$$

тогда для гамильтоновых систем (2) размерности $4, 6, 8, \dots$ ($n \geq 2$) итерационный процесс (14) будет расходящимся.

Именно на основе этого факта Пуанкаре сделал заключение, что последовательность простых "степенных" преобразований $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ является расходящейся в области G_{2n} . Кроме того, фазовые n -мерные многообразия G_n^* и $\bar{G}_n = G_n \setminus G_n^*$ всюду плотны в $G_n = G_n^* \cup \bar{G}_n$, из чего следует, что проблема сходимости "степенных" преобразований $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ фактически становится неразрешимой.

Вместе с тем К. Зигель показал [15], что на полном многообразии G "малые знаменатели" (k, ω) удовлетворяют неравенству

$$|(k, \omega(p))| \geq \frac{K(p)}{\|k\|^{n+1}}, \quad (15)$$

где $\omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p}$, и лебеговы меры многообразий G_n^* , $\bar{G}_n$ соответственно равны

$$0 < \text{mes } \bar{G}_n = \varepsilon \ll 1, \quad \text{mes } G_n^* = 1 - \varepsilon,$$

где ε – малое положительное число.

Идеология методов "ускоренной сходимости", развитых в КАМ-теории для "борьбы" с малыми знаменателями вида (15), оказывается весьма эффективной [2, 4] и состоит в том, что с учетом условия (15) можно построить сходящиеся процедуры (14) и, следовательно, можно привести первоначальную систему дифференциальных уравнений (2) к системе (5). Проблема малых знаменателей присутствует не только в гамильтоновой динамике. Она фактически появляется всюду, где имеются много периодические процессы (например, в задаче об отображении окружности на себя, в задаче об устойчивости особой точки типа "центр" [14–17], в теории движения планет и спутников, в космической динамике).

На основании изложенного можно сформулировать как минимум две фундаментальные проблемы качественной и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые я имел честь и удовольствие неоднократно обсуждать с выдающимся математиком, академиком Константином Сергеевичем Сибирским. И сегодня они весьма важны и для теории нелинейных колебаний, и для качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Формулировка первой проблемы. Выше написано, что построение бесконечной цепочки преобразований (14) возможно лишь на базе КАМ-теории с учетом топологической структуры n -мерных многообразий G_n^* и $\bar{G}_n = G_n \setminus G_n^*$ [3, 4].

Проблема состоит в том, чтобы выделить и исследовать аналитические свойства такого подмножества функций n переменных из множества $\{F(x)\}$ всевозможных 2π -периодических аналитических функций вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 + 2\pi, x_2 + 2\pi, \dots, x_n + 2\pi)$, определенных на n -мерных

торах G_n , для которого его мера $mes \bar{G}_n = 0$, и соответственно определить второе подмножество функций, для которого мера $mes G_n^* = 1$.

Применительно к гамильтоновым системам вида (2) это означает, что необходимо найти и изучить свойства такого подмножества гамильтоновых систем из множества (2), для которого оценки, построенные В.И. Арнольдом [4], справедливы при $\varepsilon = 0$, т.е. $mes \bar{G}_n = 0$, а $mes G_n^* = 1$.

Конкретные примеры таких гамильтонианов существуют (например, гамильтонианы, аналитическая структура которых суть два-периодические тригонометрические полиномы с заданными постоянными частотами). Решение этой проблемы могло бы способствовать исследованию динамической эволюции на больших, космогонических интервалах времени, конкретных планетных систем (каковой, например, является наша Солнечная система), для которых частоты, определенные из длительных наблюдений, можно считать заданными.

Формулировка второй проблемы. Известен пример В.И. Арнольда о неустойчивости положения равновесия для гамильтоновой системы с тремя импульсами и тремя фазовыми углами [16]. Этот пример стимулирует поиск таких, по-видимому, достаточно жестких условий, которым должны удовлетворять гамильтонианы, зависящие от 6-, 8-, 10-ти и т.д. канонических переменных, чтобы качество устойчивости положения равновесия имело место не только в первом приближении.

Эта проблема стала весьма актуальной в последнее десятилетие, в связи с новыми фундаментальными результатами по динамической эволюции реальной (а не гипотетической) Солнечной системы, полученными американскими и российскими исследователями [17–20]. Современные суперкомпьютеры позволили вычислить эволюцию динамики реальных планет на интервалах времени в миллиарды лет с гарантированной (проверенной независимыми методами) точностью. Выводы вытекают однозначные: Солнечная система имеет огромный запас конфигурационной прочности в интервалах времени в миллиарды лет (и "вперед", и "назад"), если учитывать при этом только внутренние (интерпланетарные и планетарно-солнечные) гравитационные связи, т.е. такие связи, которые гарантируют корректность формализма гамильтоновой динамики.

В заключение хочу отметить, что я имел огромное счастье в жизни обсуждать эти и многие другие научные проблемы с замечательным, скромнейшим человеком, выдающимся ученым Константином Сергеевичем Сибирским. Мне безмерно жаль, что сегодня я лишен возможности общаться с ним.

References

- [1] Пуанкаре А. *Избранные труды*, Т. 1–3. М., Наука, 1971–1973.
- [2] Колмогоров А.Н. *О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона*. ДАН СССР, 1954, **98**, № 4, 527–530.
- [3] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. М., Наука, 1974.
- [4] Арнольд В.И. *Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике*. УМН, 1963, **18**, вып. 6, 91–192.

- [5] МОЗЕР Ю. *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория*. Ижевск, ISBN 5-89806-019-7, 1999.
- [6] ГРЕБЕНИКОВ Е.А. *Метод усреднения в прикладных задачах*. М., Наука, 1986.
- [7] БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М., Изд-во АН СССР, 1963.
- [8] БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А., САМОЙЛЕНКО А.М. *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*. Киев, Наукова Думка, 1969.
- [9] ГРЕБЕНИКОВ Е.А., РЯБОВ Ю.А. *Новые качественные методы в небесной механике*. М., Наука, 1971.
- [10] ГРЕБЕНИКОВ Е.А. *Метод усреднения в прикладных задачах*. М., Наука, 1986.
- [11] ЗИГМУНД А. *Тригонометрические ряды*. М., Мир, 1965.
- [12] ГРЕБЕНИКОВ Е.А., РЯБОВ Ю.А. *Резонансы и малые знаменатели в небесной механике*. М., Наука, 1979.
- [13] БОЛСИНОВ А.В., ФОМЕНКО А.Т. *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*. М., Наука, 1997.
- [14] GREBENIKOV E., KOZAK-SKOWORODKIN D., JAKUBIAK M. *The algebraic Problems of the Normalization in Hamiltonian Theory*. М., Изд-во С. Лаврова, "Mathematica" System in teaching and research, 2000, 73–90.
- [15] SIEGEL C.L. *Iterations of analytic functions*. Ann. of Math., 1942, **43**, No. 4.
- [16] АРНОЛЬД В.И. *О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы*. ДАН СССР, 1964, **156**, № 1, 9–12.
- [17] LASKAR J. *Marginal stability and chaos in the Solar system*. Ferraz Mello S. et al. (eds.), Dynamics, ephemerides and astrometry of the Solar System, IAU: Netherlands, 1996, 75–88.
- [18] LASKAR J., CORREIA A.C.M., GASTINEAU M., JOUTEL F., LEVRARD B., ROBUTEL P. *Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars*. Icarus, 2004, **170**, Iss. 2, 343–364.
- [19] ГРЕБЕНИКОВ Е.А., СМУЛЬСКИЙ И.И. *Эволюция орбиты Марса на интервале времени в сто миллионов лет*. Сообщения по прикладной математике, Препринт ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, М., 2007.
- [20] СМУЛЬСКИЙ И.И. *Математическая модель Солнечной системы*. Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа, Сборник ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, М., 2007, 119–139.